Preuves en déduction naturelle du livre I de l'*Ethique* de Spinoza

Luc Pommeret
D'après la traduction de Jarrett

2 mars 2025 *

Résumé

Ce document présente une formalisation en déduction naturelle [10] des propositions du livre I de l'*Éthique* de Spinoza, s'appuyant sur le travail de Charles Jarrett [3] dans son article fondamental "The Logical Structure of Spinoza's Ethics, Part I" (1978). À l'aide d'une logique bimodale, nous démontrons rigoureusement l'enchaînement logique des 36 propositions de la partie *De Deo* (De Dieu), établissant ainsi une cohérence interne de l'architecture métaphysique spinoziste. Cette formalisation explicite les relations déductives entre les définitions, axiomes et propositions, offrant un aperçu de la rigueur déductive que Spinoza a insufflée à son système philosophique. Notre travail s'inscrit dans une double tradition : celle des études formelles de l'Éthique initiée par Jarrett et poursuivie par d'autres chercheurs [4, 5], et celle de la vérification assistée par ordinateur des raisonnements philosophiques, rendue possible grâce à l'implémentation complète de ces preuves dans l'assistant de preuve Coq [13].

Table des matières

1 Introduction **2**
1.1 Contexte philosophique et historique . . . 2
1.2 Objectifs et méthodologie . . . 2
1.3 Implémentation en Coq et validation computationnelle . . . 3
1.4 État de l'art et positionnement . . . 3

2 Notation et symboles **3**
2.1 Lexique . . . 3
2.1.1 Opérateurs modaux . . . 3
2.2 Règles modales . . . 3
2.2.1 Prédicats unaires . . . 4
2.2.2 Prédicats binaires . . . 4
2.2.3 Prédicats ternaires . . . 4
2.3 Définitions . . . 5
2.4 Axiomes . . . 5

3 Preuves en déduction naturelle **7**
3.1 Proposition 1 (P1) . . . 7
3.2 Proposition 2 (P2) . . . 8
3.3 Proposition 3 (P3) . . . 9
3.3.1 Lemme DP1 . . . 10
3.3.2 Lemme DP4 . . . 10
3.3.3 Lemme DP5 . . . 11
3.3.4 Lemme DP6 . . . 12
3.3.5 Lemme DP7 . . . 13
3.3.6 Théorème DPI . . . 14
3.3.7 Théorème DPII . . . 15
3.3.8 Théorème DPIII . . . 16
3.4 Proposition 4 (P4) . . . 17
3.5 Proposition 5 (P5) . . . 18
3.6 Proposition 6 (P6) . . . 19
3.6.1 Corollaire de la Proposition 6 (P6c) . . . 20
3.7 Proposition 7 (P7) . . . 21

*Édité le 2 mai 2026.

3.8 Proposition 8 (P8) . . . 22
3.9 Proposition 9 (P9) . . . 23
3.10 Proposition 10 (P10) . . . 24
3.11 Proposition 11 (P11) . . . 25
3.12 Proposition 12 (P12) . . . 26
3.13 Proposition 13 (P13) . . . 26
3.14 Proposition 14 (P14) . . . 27
3.14.1 Proposition 14 alternative (P14-A) . . . 28
3.15 Proposition 15 (P15) . . . 29
3.16 Proposition 16 (P16) . . . 30
3.17 Proposition 17 (P17) . . . 31
3.17.1 Corollaire 2 de la Proposition 17 (P17c2) . . . 32
3.18 Proposition 18 (P18) . . . 33
3.19 Proposition 19 (P19) . . . 34
3.20 Proposition 20 (P20) . . . 35
3.21 Proposition 21 (P21) . . . 36
3.22 Proposition 22 (P22) . . . 37
3.23 Proposition 23 (P23) . . . 38
3.24 Proposition 24 (P24) . . . 39
3.25 Proposition 25 (P25) . . . 39
3.26 Proposition 26 (P26) . . . 40
3.27 Proposition 27 (P27) . . . 41
3.28 Proposition 28 (P28) . . . 42
3.29 Proposition 29 (P29) . . . 43
3.30 Proposition 30 (P30) . . . 44
3.31 Proposition 31 (P31) . . . 45
3.31.1 Proposition 31a (P31a) . . . 45
3.31.2 Proposition 31b (P31b) . . . 46
3.31.3 Proposition 31c (P31c) . . . 47
3.31.4 Proposition 31d (P31d) . . . 48
3.32 Proposition 32 (P32) . . . 49
3.33 Proposition 33 (P33) . . . 50
3.34 Proposition 34 (P34) . . . 51
3.35 Proposition 35 (P35) . . . 52
3.36 Proposition 36 (P36) . . . 53

1 Introduction

1.1 Contexte philosophique et historique

L'*Éthique* de Baruch Spinoza (1632-1677) constitue l'une des œuvres majeures de la philosophie occidentale, remarquable tant par sa profondeur conceptuelle que par sa structure déductive rigoureuse *more geometrico*. Rédigée selon un modèle géométrique inspiré des *Éléments* d'Euclide, l'œuvre procède par définitions, axiomes, propositions et démonstrations, formant un système métaphysique, épistémologique et éthique cohérent. Le livre I, *De Deo* (De Dieu), pose les fondements métaphysiques du système spinoziste, établissant la nature de Dieu comme substance unique, et déployant les conséquences de cette ontologie moniste [1].

La structure démonstrative adoptée par Spinoza suggère une aspiration à la même certitude que celle des mathématiques. Cette aspiration a naturellement conduit plusieurs chercheurs à examiner la validité formelle des arguments de Spinoza, en utilisant des outils logiques modernes. Parmi ces travaux, l'article de Charles Jarrett, "The Logical Structure of Spinoza's Ethics, Part I" (1978) [3], représente une contribution majeure, proposant une formalisation complète des concepts et des raisonnements du premier livre de l'*Éthique* dans un système de logique modale.

D'autres formalisation ont été faites par Baptiste Mélès (jusqu'à la proposition 8) a partir des écrits de Martial Guéroult. Voir pour cela son Github : https ://github.com/BapMel/ethicoq.

1.2 Objectifs et méthodologie

Ce document s'inscrit dans cette tradition d'analyse formelle, avec pour objectif principal de présenter de manière claire et systématique les preuves en déduction naturelle des propositions du livre I de l'*Éthique*, selon la formalisation proposée par Jarrett. La déduction naturelle, système d'inférence développé par Gerhard

Gentzen dans les années 1930 [8], offre un cadre particulièrement adapté pour représenter les raisonnements philosophiques, en permettant d'expliciter chaque étape déductive.

Notre approche méthodologique comprend :

1. Un lexique formel traduisant les concepts spinozistes en prédicats logiques, tiré de Jarrett [3]
2. La formulation des définitions et axiomes dans ce langage formel, également tiré de [3]
3. La construction pas à pas des preuves pour chacune des 36 propositions du livre I
4. Des théorèmes implicites et lemmes intermédiaires nécessaires aux démonstrations

Il faut noter que cette formalisation est une interprétation du système spinoziste ! Celle de Charles Jarrett. Les preuves que je fournis suivent donc cette interprétation Jarrettienne de Spinoza.

1.3 Implémentation en Coq et validation computationnelle

Au-delà de la présentation formelle contenue dans ce document, l'ensemble des preuves a été implémenté dans l'assistant de preuve Coq, permettant une vérification computationnelle de leur validité. Cette implémentation, disponible sur GitHub [13], constitue une étape significative dans l'application des méthodes de vérification formelle à l'histoire de la philosophie.

L'utilisation de Coq apporte plusieurs avantages :

— Une vérification rigoureuse de chaque étape déductive

— L'identification précise des hypothèses implicites dans les raisonnements de Spinoza

— La génération automatique de preuves complètes et vérifiables

— Un cadre pour l'extension future du projet aux autres livres de l'*Éthique*, ce qui constitue la librairie `SpinozaJarrett`

Notre travail s'inscrit ainsi dans un courant émergent de "philosophie formelle assistée par ordinateur", rejoignant d'autres efforts comme ceux de [6] et de chercheurs ayant appliqué la vérification formelle à des arguments philosophiques [15].

1.4 État de l'art et positionnement

L'examen formel de l'*Éthique* de Spinoza a une histoire riche. Au-delà du travail logique de Jarrett, on peut citer les analyses de Martial Guéroult [4] en France, qui, sans toujours utiliser la logique formelle contemporaine, a minutieusement étudié l'architecture démonstrative de l'œuvre. Plus récemment, plusieurs chercheurs ont exploré l'application des méthodes formelles modernes à l'*Éthique* [7].

Ce document se veut ainsi à la fois un outil pédagogique pour comprendre la structure logique de l'*Éthique*, une contribution à l'étude formelle de l'œuvre de Spinoza, et une démonstration de l'applicabilité des méthodes de vérification formelle à l'histoire de la philosophie [14].

2 Notation et symboles

2.1 Lexique

2.1.1 Opérateurs modaux

— $L(p)$: Nécessité logique - p est logiquement nécessaire

— $M(p)$: Possibilité - p est possible

— $N(p)$: Nécessité naturelle - p est naturellement nécessaire

2.2 Règles modales

— **R1** : $\forall P(L(P) \to N(P))$
La nécessité logique implique la nécessité naturelle

— **R2** : $\forall P(N(P) \to P)$
Axiome T pour la nécessité naturelle

— **R3** : $\forall P \forall Q(L(P \to Q) \to (L(P) \to L(Q)))$
Axiome K pour la nécessité logique

— **R4** : $\forall P(M(P) \to L(M(P)))$
Axiome S5 - possibilité et nécessité

— **R5** : $\forall P(P \to L(P))$
Règle de nécessitation

— **R6** : $\forall P \forall Q(N(P \to Q) \to (N(P) \to N(Q)))$
Axiome de distributivité pour la nécessité naturelle

— **R7** : $\forall P \forall Q(N(P \leftrightarrow Q) \to N(P \to Q))$
Extraction de l'implication à partir de l'équivalence (pour la nécessité naturelle)

— **R8** : $\forall P \forall Q(N(P \leftrightarrow Q) \to N(Q \to P))$
Extraction de l'implication réciproque à partir de l'équivalence (pour la nécessité naturelle)

— **R9** : $\forall P(N(P) \to \neg M(\neg P))$
Une proposition naturellement nécessaire n'est pas possiblement fausse

— **R10** : $\forall x(F_1(x) \wedge \neg N(\exists v(v = x)) \to \exists z(z \neq x \wedge K_2(z, x) \wedge \neg N(\exists v(v = z)) \wedge F_1(z)))$
Axiome de la chaîne causale des modes finis : pour un mode fini non nécessaire, il existe un autre mode fini non nécessaire qui le cause

— **S5 (règle ontologique)** : $\forall P(M(P) \wedge L(P \to L(P)) \to L(P))$
Règle ontologique en S5 : si P est possible et implique nécessairement sa propre nécessité, alors P est nécessaire (utilisée pour formaliser l'argument ontologique de P11)

2.2.1 Prédicats unaires

— $A_1(x)$: x est un attribut

— $B_1(x)$: x est libre

— $D_1(x)$: x est une instance de désir

— $E_1(x)$: x est éternel

— $F_1(x)$: x est fini

— $G_1(x)$: x est un dieu

— $J_1(x)$: x est une instance d'amour

— $K_1(x)$: x est une idée

— $M_1(x)$: x est un mode

— $N_1(x)$: x est nécessaire

— $S_1(x)$: x est une substance

— $T_1(x)$: x est vrai

— $U_1(x)$: x est un intellect

— $W_1(x)$: x est une volonté

2.2.2 Prédicats binaires

— $A_2(x, y)$: x est un attribut de y

— $C_2(x, y)$: x est conçu à travers y

— $I_2(x, y)$: x est en y

— $K_2(x, y)$: x est cause de y

— $L_2(x, y)$: x limite y

— $M_2(x, y)$: x est un mode de y

— $O_2(x, y)$: x est un objet de y

— $P_2(x, y)$: x est la puissance de y

— $R_2(x, y)$: x a plus de réalité que y

— $V_2(x, y)$: x a plus d'attributs que y

2.2.3 Prédicats ternaires

— $C_3(x, y, z)$: x est commun à y et à z

— $D_3(x, y, z)$: x est divisible entre y et z

2.3 Définitions

— **D1** : $K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)) \leftrightarrow L(\exists y(y = x))$
J'entends par cause de soi ce dont l'essence enveloppe l'existence ; autrement dit, ce dont la nature ne peut être conçue sinon comme existante.

— **D2** : $F_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge L_2(y,x) \wedge \forall z(A_2(z,x) \leftrightarrow A_2(z,y)))$
Cette chose est dite finie en son genre, qui peut être limitée par une autre de même nature. Par exemple un corps est dit fini, parce que nous en concevons toujours un autre plus grand. De même une pensée est limitée par une autre pensée. Mais un corps n'est pas limité par une pensée, ni une pensée par un corps.

— **D3** : $S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y,y) \wedge C_2(y,y))$
J'entends par substance ce qui est en soi et est conçu par soi : c'est-à-dire ce dont le concept n'a pas besoin du concept d'une autre chose, duquel il doive être formé.

— **D4a** : $A_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y) \wedge I_2(y,x) \wedge C_2(y,x))$

— **D4b** : $A_2(x,y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y,x))$
J'entends par attribut ce que l'entendement perçoit d'une substance comme constituant son essence.

— **D5a** : $M_2(x,y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y))$

— **D5b** : $M_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge M_2(x,y))$
J'entends par mode les affections d'une substance, autrement dit ce qui est dans une autre chose, par le moyen de laquelle il est aussi conçu.

— **D6** : $G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y,x)))$
J'entends par Dieu un être absolument infini, c'est-à-dire une substance constituée par une infinité d'attributs dont chacun exprime une essence éternelle et infinie.

— **D7a** : $B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$

— **D7b** : $N_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$
Cette chose sera dite libre qui existe par la seule nécessité de sa nature et est déterminée par soi seule à agir : cette chose sera dite nécessaire ou plutôt contrainte qui est déterminée par une autre à exister et à produire quelque effet dans une condition certaine et déterminée.

— **D8** : $E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$
J'entends par éternité l'existence elle-même en tant qu'elle est conçue comme suivant nécessairement de la seule définition d'une chose éternelle.

2.4 Axiomes

— **A1** : $\forall x(I_2(x,x) \vee \exists y(y \neq x \wedge I_2(x,y)))$
Tout ce qui est, est ou bien en soi, ou bien en autre chose.

— **A2** : $\forall x((\neg\exists y(y \neq x \wedge C_2(x,y))) \leftrightarrow C_2(x,x))$
Ce qui ne peut être conçu par le moyen d'une autre chose, doit être conçu par soi.

— **A3** : $\forall x\forall y(K_2(y,x) \rightarrow N((\exists v(v = y)) \leftrightarrow \exists v(v = x)))$
D'une cause déterminée que l'on suppose donnée, suit nécessairement un effet, et au contraire si nulle cause déterminée n'est donnée, il est impossible qu'un effet suive.

— **A4** : $\forall x\forall y(K_2(x,y) \leftrightarrow C_2(y,x))$
La connaissance de l'effet dépend de la connaissance de la cause et l'enveloppe.

— **A5** : $\forall x\forall y((\neg\exists z(C_3(z,x,y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x,y) \wedge \neg C_2(y,x)))$
Les choses qui n'ont rien de commun l'une avec l'autre ne se peuvent non plus connaître l'une par l'autre ; autrement dit, le concept de l'une n'enveloppe pas le concept de l'autre.

— **A6** : $\forall x(K_1(x) \rightarrow (T_1(x) \leftrightarrow \exists y(O_2(y,x) \wedge K_2(x,y))))$
Une idée vraie doit s'accorder avec l'objet dont elle est l'idée.

— **A7** : $\forall x(M(\neg\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg L(\exists y(y = x)))$
Toute chose qui peut être conçue comme non existante, son essence n'enveloppe pas l'existence.

Axiomes découverts par Charles Jarrett, implicites chez Spinoza

— **A8** : $\forall x\forall y(I_2(x,y) \rightarrow C_2(x,y))$
Si x est en y alors x est conçu par y

— **A9** : $\forall x(\exists y(A_2(y,x)))$
Toute chose a un attribut

— **A10** : $\forall x\forall y\forall z(D_3(x,y,z) \rightarrow M(\neg\exists w(w=x)))$
Si x est divisible en y et z alors il est possible que x n'existe pas

— **A11** : $\forall x\forall y(S_1(x) \wedge L_2(y,x) \rightarrow S_1(y))$
Si x est une substance et y limite x alors y est une substance

— **A12** : $\forall x((\exists y(M_2(x,y))) \rightarrow M_1(x))$
Si x est un mode de quelque chose alors x est un mode

— **A13** : $M(\exists x(G_1(x)))$
Il est possible qu'un Dieu existe

— **A14** : $\forall x(N(\exists y(y=x)) \leftrightarrow \neg F_1(x))$
x existe nécessairement si et seulement si x n'est pas fini

3 Preuves en déduction naturelle

3.1 Proposition 1 (P1)

Une substance est antérieure en nature à ses affections.

$$\forall x \forall y (M_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x,y) \wedge I_2(y,y))$$

1	$M_2(x,y) \wedge S_1(y)$	
2	$M_2(x,y)$	$\wedge$E, 1
3	$S_1(y)$	$\wedge$E, 1
4	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y,y) \wedge C_2(y,y))$	D3
5	$I_2(y,y) \wedge C_2(y,y)$	$\Rightarrow$E, 3, 4
6	$I_2(y,y)$	$\wedge$E, 5
7	$M_2(x,y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y))$	D5a
8	$x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 2, 7
9	$I_2(x,y)$	$\wedge$E, 8
10	$I_2(x,y) \wedge I_2(y,y)$	$\wedge$I, 9, 6
11	$M_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x,y) \wedge I_2(y,y)$	$\Rightarrow$I, 1–10
12	$\forall y (M_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x,y) \wedge I_2(y,y))$	$\forall$I, 11
13	$\forall x \forall y (M_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x,y) \wedge I_2(y,y))$	$\forall$I, 12

3.2 Proposition 2 (P2)

Deux substances ayant des attributs différents n'ont rien de commun entre elles.

$$\forall x \forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z, x, y)))$$

1	$S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y$	
2	$S_1(x)$	$\land$E, 1
3	$S_1(y)$	$\land$E, 1
4	$x \neq y$	$\land$E, 1
5	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x, x) \land C_2(x, x))$	D3
6	$I_2(x, x) \land C_2(x, x)$	$\Rightarrow$E, 2, 5
7	$C_2(x, x)$	$\land$E, 6
8	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y, y) \land C_2(y, y))$	D3
9	$I_2(y, y) \land C_2(y, y)$	$\Rightarrow$E, 3, 8
10	$C_2(y, y)$	$\land$E, 9
11	$(\neg \exists z(z \neq x \land C_2(x, z))) \leftrightarrow C_2(x, x)$	A2
12	$C_2(x, x) \rightarrow \neg \exists z(z \neq x \land C_2(x, z))$	$\land$E, 11
13	$\neg \exists z(z \neq x \land C_2(x, z))$	$\Rightarrow$E, 7, 12
14	$\neg(y \neq x \land C_2(x, y))$	$\forall$E, 13
15	$y \neq x \rightarrow \neg C_2(x, y)$	$\Rightarrow$E, 14
16	$x \neq y \rightarrow y \neq x$	Logique
17	$x \neq y$	$\land$E, 1
18	$y \neq x$	$\Rightarrow$E, 17, 16
19	$\neg C_2(x, y)$	$\Rightarrow$E, 18, 15
20	$(\neg \exists z(z \neq y \land C_2(y, z))) \leftrightarrow C_2(y, y)$	A2
21	$C_2(y, y) \rightarrow \neg \exists z(z \neq y \land C_2(y, z))$	$\land$E, 20
22	$\neg \exists z(z \neq y \land C_2(y, z))$	$\Rightarrow$E, 10, 21
23	$\neg(x \neq y \land C_2(y, x))$	$\forall$E, 22
24	$x \neq y \rightarrow \neg C_2(y, x)$	$\Rightarrow$E, 23
25	$\neg C_2(y, x)$	$\Rightarrow$E, 4, 24
26	$(\neg \exists z(C_3(z, x, y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x, y) \land \neg C_2(y, x))$	A5
27	$(\neg C_2(x, y) \land \neg C_2(y, x)) \rightarrow \neg \exists z(C_3(z, x, y))$	$\land$E, 26
28	$\neg C_2(x, y) \land \neg C_2(y, x)$	$\land$I, 19, 25
29	$\neg \exists z(C_3(z, x, y))$	$\Rightarrow$E, 28, 27
30	$S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z(C_3(z, x, y))$	$\Rightarrow$I, 1–29
31	$\forall y(S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z(C_3(z, x, y)))$	$\forall$I, 30
32	$\forall x \forall y(S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z(C_3(z, x, y)))$	$\forall$I, 31

3.3 Proposition 3 (P3)

Si des choses n'ont rien de commun entre elles, l'une d'elles ne peut être cause de l'autre.

$$\forall x \forall y(\neg \exists z(C_3(z,x,y)) \rightarrow \neg K_2(x,y) \wedge \neg K_2(y,x))$$

1	$\neg \exists z(C_3(z,x,y))$	
2	$(\neg \exists z(C_3(z,x,y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x,y) \wedge \neg C_2(y,x))$	A5
3	$\neg C_2(x,y) \wedge \neg C_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 1, 2
4	$\neg C_2(x,y)$	$\wedge$E, 3
5	$\neg C_2(y,x)$	$\wedge$E, 3
6	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
7	$K_2(x,y) \leftrightarrow C_2(y,x)$	$\forall$E, 6
8	$K_2(y,x) \leftrightarrow C_2(x,y)$	$\forall$E, 6
9	$K_2(x,y)$	
10	$C_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 9, 7
11	$\neg C_2(y,x)$	R, 5
12	$C_2(y,x) \wedge \neg C_2(y,x)$	$\wedge$I, 10, 11
13	$\perp$	$\perp$E, 12
14	$\neg K_2(x,y)$	$\neg$I, 9–13
15	$K_2(y,x)$	
16	$C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 15, 8
17	$\neg C_2(x,y)$	R, 4
18	$C_2(x,y) \wedge \neg C_2(x,y)$	$\wedge$I, 16, 17
19	$\perp$	$\perp$E, 18
20	$\neg K_2(y,x)$	$\neg$I, 15–19
21	$\neg K_2(x,y) \wedge \neg K_2(y,x)$	$\wedge$I, 14, 20
22	$\neg \exists z(C_3(z,x,y)) \rightarrow \neg K_2(x,y) \wedge \neg K_2(y,x)$	$\Rightarrow$I, 1–21
23	$\forall y(\neg \exists z(C_3(z,x,y)) \rightarrow \neg K_2(x,y) \wedge \neg K_2(y,x))$	$\forall$I, 22
24	$\forall x \forall y(\neg \exists z(C_3(z,x,y)) \rightarrow \neg K_2(x,y) \wedge \neg K_2(y,x))$	$\forall$I, 23

Lemmes intermédiaires énoncés par Jarrett

3.3.1 Lemme DP1

x est une substance si et seulement si x est en soi.

$$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow I_2(x,x))$$

1	$S_1(x)$	
2	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
3	$I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 1, 2
4	$I_2(x,x)$	$\wedge$E, 3
5	$S_1(x) \rightarrow I_2(x,x)$	$\Rightarrow$I, 1–4
6	$I_2(x,x)$	
7	$I_2(x,x) \rightarrow C_2(x,x)$	A8
8	$C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 6, 7
9	$I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\wedge$I, 6, 8
10	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
11	$S_1(x)$	$\Rightarrow$E, 9, 10
12	$I_2(x,x) \rightarrow S_1(x)$	$\Rightarrow$I, 6–11
13	$S_1(x) \leftrightarrow I_2(x,x)$	$\Rightarrow$I, 5, 12
14	$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow I_2(x,x))$	$\forall$I, 13

3.3.2 Lemme DP4

Une substance est sa propre cause.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow K_2(x,x))$$

1	$S_1(x)$	
2	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
3	$I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 1, 2
4	$C_2(x,x)$	$\wedge$E, 3
5	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
6	$K_2(x,x) \leftrightarrow C_2(x,x)$	$\forall$E, 5
7	$K_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 4, 6
8	$S_1(x) \rightarrow K_2(x,x)$	$\Rightarrow$I, 1–7
9	$\forall x(S_1(x) \rightarrow K_2(x,x))$	$\forall$I, 8

3.3.3 Lemme DP5

Toute chose est soit une substance soit un mode.

$$\forall x(S_1(x) \vee M_1(x))$$

1	$\forall x(I_2(x,x) \vee \exists y(y \neq x \wedge I_2(x,y)))$	A1
2	$I_2(x,x) \vee \exists y(y \neq x \wedge I_2(x,y))$	$\forall$E, 1
3	$\quad I_2(x,x)$	
4	$\quad S_1(x) \leftrightarrow I_2(x,x)$	DP1
5	$\quad S_1(x)$	$\Rightarrow$E, 3, 4
6	$\quad S_1(x) \vee M_1(x)$	$\vee$I, 5
7	$\quad \exists y(y \neq x \wedge I_2(x,y))$	
8	$\quad\quad y \neq x \wedge I_2(x,y)$	
9	$\quad\quad y \neq x$	$\wedge$E, 8
10	$\quad\quad I_2(x,y)$	$\wedge$E, 8
11	$\quad\quad I_2(x,y) \rightarrow C_2(x,y)$	A8
12	$\quad\quad C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 10, 11
13	$\quad\quad y \neq x \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y)$	$\wedge$I, 9, 10, 12
14	$\quad\quad M_2(x,y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y))$	D5a
15	$\quad\quad x \neq y \leftrightarrow y \neq x$	Logique
16	$\quad\quad x \neq y$	$\Rightarrow$E, 9, 15
17	$\quad\quad x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y)$	$\wedge$I, 16, 10, 12
18	$\quad\quad M_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 17, 14
19	$\quad\quad (\exists y(M_2(x,y))) \rightarrow M_1(x)$	A12
20	$\quad\quad \exists y(M_2(x,y))$	$\exists$I, 18
21	$\quad\quad M_1(x)$	$\Rightarrow$E, 20, 19
22	$\quad\quad S_1(x) \vee M_1(x)$	$\vee$I, 21
23	$\quad S_1(x) \vee M_1(x)$	$\exists$E, 7, 8–22
24	$S_1(x) \vee M_1(x)$	$\vee$E, 2, 3–6, 7–23
25	$\forall x(S_1(x) \vee M_1(x))$	$\forall$I, 24

3.3.4 Lemme DP6

Une substance et un mode ne peuvent jamais être la même chose.

$$\forall x(\neg(S_1(x) \wedge M_1(x)))$$

1	$S_1(x) \wedge M_1(x)$	
2	$S_1(x)$	$\wedge$E, 1
3	$M_1(x)$	$\wedge$E, 1
4	$M_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge M_2(x,y))$	D5b
5	$\exists y(S_1(y) \wedge M_2(x,y))$	$\Rightarrow$E, 3, 4
6	$S_1(y) \wedge M_2(x,y)$	
7	$M_2(x,y)$	$\wedge$E, 6
8	$M_2(x,y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y))$	D5a
9	$x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 7, 8
10	$x \neq y$	$\wedge$E, 9
11	$C_2(x,y)$	$\wedge$E, 9
12	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
13	$I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 2, 12
14	$C_2(x,x)$	$\wedge$E, 13
15	$(\neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))) \leftrightarrow C_2(x,x)$	A2
16	$C_2(x,x) \rightarrow \neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	$\wedge$E, 15
17	$\neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	$\Rightarrow$E, 14, 16
18	$\neg(y \neq x \wedge C_2(x,y))$	$\forall$E, 17
19	$y \neq x \leftrightarrow x \neq y$	Logique
20	$y \neq x$	$\Rightarrow$E, 10, 19
21	$y \neq x \wedge C_2(x,y)$	$\wedge$I, 20, 11
22	$\neg(y \neq x \wedge C_2(x,y)) \wedge (y \neq x \wedge C_2(x,y))$	$\wedge$I, 18, 21
23	$\bot$	$\bot$E, 22
24	$\bot$	$\exists$E, 5, 6–23
25	$\neg(S_1(x) \wedge M_1(x))$	$\neg$I, 1–24
26	$\forall x(\neg(S_1(x) \wedge M_1(x)))$	$\forall$I, 25

3.3.5 Lemme DP7

Si x est un attribut de y et y est une substance, alors $x = y$.

$$\forall x \forall y (A_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow x = y)$$

1	$A_2(x,y) \wedge S_1(y)$	
2	$A_2(x,y)$	$\wedge$E, 1
3	$S_1(y)$	$\wedge$E, 1
4	$A_2(x,y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y,x))$	D4b
5	$A_1(x) \wedge C_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 2, 4
6	$C_2(y,x)$	$\wedge$E, 5
7	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y,y) \wedge C_2(y,y))$	D3
8	$I_2(y,y) \wedge C_2(y,y)$	$\Rightarrow$E, 3, 7
9	$C_2(y,y)$	$\wedge$E, 8
10	$(\neg\exists z(z \neq y \wedge C_2(y,z))) \leftrightarrow C_2(y,y)$	A2
11	$C_2(y,y) \rightarrow \neg\exists z(z \neq y \wedge C_2(y,z))$	$\wedge$E, 10
12	$\neg\exists z(z \neq y \wedge C_2(y,z))$	$\Rightarrow$E, 9, 11
13	$\neg(x \neq y \wedge C_2(y,x))$	$\forall$E, 12
14	$x \neq y \rightarrow \neg C_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 13
15	$C_2(y,x) \rightarrow \neg(x \neq y)$	Contraposée
16	$C_2(y,x)$	R, 6
17	$\neg(x \neq y)$	$\Rightarrow$E, 16, 15
18	$x = y$	$\neg$E, 17
19	$A_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow x = y$	$\Rightarrow$I, 1–18
20	$\forall y(A_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow x = y)$	$\forall$I, 19
21	$\forall x \forall y(A_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow x = y)$	$\forall$I, 20

Théorème implicites importants chez Spinoza

3.3.6 Théorème DPI

Tout est soit une substance, soit un mode, mais pas les deux.

$$\forall x((S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x)))$$

1	$\forall x(S_1(x) \lor M_1(x))$	DP5
2	$S_1(x) \lor M_1(x)$	∀E, 1
3	$\forall x(\neg(S_1(x) \land M_1(x)))$	DP6
4	$\neg(S_1(x) \land M_1(x))$	∀E, 3
5	$S_1(x)$	
6	$M_1(x)$	
7	$S_1(x) \land M_1(x)$	∧I, 5, 6
8	$\neg(S_1(x) \land M_1(x))$	R, 4
9	$(S_1(x) \land M_1(x)) \land \neg(S_1(x) \land M_1(x))$	∧I, 7, 8
10	$\bot$	⊥E, 9
11	$\neg M_1(x)$	¬I, 6–10
12	$S_1(x) \land \neg M_1(x)$	∧I, 5, 11
13	$(S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x))$	∨I, 12
14	$M_1(x)$	
15	$S_1(x)$	
16	$S_1(x) \land M_1(x)$	∧I, 15, 14
17	$\neg(S_1(x) \land M_1(x))$	R, 4
18	$(S_1(x) \land M_1(x)) \land \neg(S_1(x) \land M_1(x))$	∧I, 16, 17
19	$\bot$	⊥E, 18
20	$\neg S_1(x)$	¬I, 15–19
21	$\neg S_1(x) \land M_1(x)$	∧I, 20, 14
22	$(S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x))$	∨I, 21
23	$(S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x))$	∨E, 2, 5–13, 14–22
24	$\forall x((S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x)))$	∀I, 23

3.3.7 Théorème DPII

Une substance est ses propres attributs.

$$\forall x(S_1(x) \to A_2(x,x))$$

1	$S_1(x)$	
2	$A_2(x,y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y,x))$	D4b
3	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
4	$I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 1, 3
5	$C_2(x,x)$	$\wedge$E, 4
6	$A_1(x) \wedge C_2(x,x)$	
7	$A_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 6, 2
8	$A_1(x) \wedge C_2(x,x) \to A_2(x,x)$	$\Rightarrow$I, 6–7
9	$A_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y) \wedge I_2(y,x) \wedge C_2(y,x))$	D4a
10	$\exists y(S_1(y) \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y) \wedge I_2(y,x) \wedge C_2(y,x)) \to A_1(x)$	$\wedge$E, 9
11	$S_1(x) \wedge I_2(x,x) \wedge C_2(x,x) \wedge I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\wedge$I, 1, 4, 4
12	$\exists y(S_1(y) \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y) \wedge I_2(y,x) \wedge C_2(y,x))$	$\exists$I, 11
13	$A_1(x)$	$\Rightarrow$E, 12, 10
14	$A_1(x) \wedge C_2(x,x)$	$\wedge$I, 13, 5
15	$A_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 14, 8
16	$S_1(x) \to A_2(x,x)$	$\Rightarrow$I, 1–15
17	$\forall x(S_1(x) \to A_2(x,x))$	$\forall$I, 16

3.3.8 Théorème DPIII

Quelque chose est une substance si et seulement si elle est causa sui.

$$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow K_2(x,x))$$

1	$S_1(x)$	
2	$\forall y(S_1(y) \rightarrow K_2(y,y))$	DP4
3	$S_1(x) \rightarrow K_2(x,x)$	∀E, 2
4	$K_2(x,x)$	⇒E, 1, 3
5	$S_1(x) \rightarrow K_2(x,x)$	⇒I, 1–4
6	$K_2(x,x)$	
7	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
8	$K_2(x,x) \leftrightarrow C_2(x,x)$	∀E, 7
9	$C_2(x,x)$	⇒E, 6, 8
10	$\forall y(I_2(y,y) \vee \exists z(z \neq y \wedge I_2(y,z)))$	A1
11	$I_2(x,x) \vee \exists z(z \neq x \wedge I_2(x,z))$	∀E, 10
12	$I_2(x,x)$	
13	$I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	∧I, 12, 9
14	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
15	$S_1(x)$	⇒E, 13, 14
16	$\exists z(z \neq x \wedge I_2(x,z))$	
17	$z \neq x \wedge I_2(x,z)$	
18	$I_2(x,z)$	∧E, 17
19	$\forall a \forall b(I_2(a,b) \rightarrow C_2(a,b))$	A8
20	$I_2(x,z) \rightarrow C_2(x,z)$	∀E, 19
21	$C_2(x,z)$	⇒E, 18, 20
22	$z \neq x$	∧E, 17
23	$z \neq x \wedge C_2(x,z)$	∧I, 22, 21
24	$\exists y(y \neq x \wedge C_2(x,y))$	∃I, 23
25	$(\neg\exists y(y \neq x \wedge C_2(x,y))) \leftrightarrow C_2(x,x)$	A2
26	$C_2(x,x) \rightarrow \neg\exists y(y \neq x \wedge C_2(x,y))$	∧E, 25
27	$\neg\exists y(y \neq x \wedge C_2(x,y))$	⇒E, 9, 26
28	$\exists y(y \neq x \wedge C_2(x,y)) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge C_2(x,y))$	∧I, 24, 27
29	$\bot$	⊥E, 28
30	$\bot$	∃E, 16, 17–29
31	$\neg\exists z(z \neq x \wedge I_2(x,z))$	¬I, 16–30
32	$S_1(x)$	∨E, 11, 12–15, 16–31
33	$K_2(x,x) \rightarrow S_1(x)$	⇒I, 6–32
34	$S_1(x) \leftrightarrow K_2(x,x)$	⇒I, 5, 33
35	$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow K_2(x,x))$	∀I, 34

3.4 Proposition 4 (P4)

Deux ou plusieurs choses distinctes se distinguent entre elles ou bien par la diversité des attributs des substances, ou bien par la diversité des affections des substances.

$$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \exists z \exists z' ((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y))))$$

1	$x \neq y$	
2	$\forall a((S_1(a) \wedge \neg M_1(a)) \vee (\neg S_1(a) \wedge M_1(a)))$	DPI
3	$(S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x))$	∀E, 2
4	$S_1(x) \wedge \neg M_1(x)$	
5	$S_1(x)$	∧E, 4
6	$(S_1(y) \wedge \neg M_1(y)) \vee (\neg S_1(y) \wedge M_1(y))$	∀E, 2
7	$S_1(y) \wedge \neg M_1(y)$	
8	$S_1(y)$	∧E, 7
9	$\forall a(S_1(a) \rightarrow A_2(a,a))$	DPII
10	$S_1(x) \rightarrow A_2(x,x)$	∀E, 9
11	$A_2(x,x)$	⇒E, 5, 10
12	$S_1(y) \rightarrow A_2(y,y)$	∀E, 9
13	$A_2(y,y)$	⇒E, 8, 12
14	$A_2(x,x) \wedge A_2(y,y) \wedge x \neq y$	∧I, 11, 13, 1
15	$\exists z \exists z'(A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z')$	∃I, 14
16	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨I, 15
17	$\neg S_1(y) \wedge M_1(y)$	
18	$M_1(y)$	∧E, 17
19	$A_2(x,x)$	⇒E, 5, 10
20	$x = x$	Réflexivité
21	$A_2(x,x) \wedge x = x \wedge M_1(y)$	∧I, 19, 20, 18
22	$\exists z \exists z'(A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y))$	∃I, 21
23	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨I, 22
24	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨E, 6, 7–16, 17–23
25	$\neg S_1(x) \wedge M_1(x)$	
26	$M_1(x)$	∧E, 25
27	$(S_1(y) \wedge \neg M_1(y)) \vee (\neg S_1(y) \wedge M_1(y))$	∀E, 2
28	$S_1(y) \wedge \neg M_1(y)$	
29	$S_1(y)$	∧E, 28
30	$S_1(y) \rightarrow A_2(y,y)$	∀E, 9
31	$A_2(y,y)$	⇒E, 29, 30
32	$y = y$	Réflexivité
33	$A_2(y,y) \wedge y = y \wedge M_1(x)$	∧I, 31, 32, 26
34	$\exists z \exists z'(A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x))$	∃I, 33
35	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨I, 34
36	$\neg S_1(y) \wedge M_1(y)$	
37	$M_1(y)$	∧E, 36
38	$M_1(x) \wedge M_1(y)$	∧I, 26, 37
39	$\exists z \exists z'(M_1(x) \wedge M_1(y))$	∃I, 38
40	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨I, 39
41	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨E, 27, 28–35, 36–40
42	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨E, 3, 4–24, 25–41
43	$x \neq y \rightarrow \exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	⇒I, 1–42
44	$\forall y(x \neq y \rightarrow \exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y))))$	∀I, 43
45	$\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow \exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y))))$	∀I, 44

3.5 Proposition 5 (P5)

Il ne peut y avoir dans la nature deux ou plusieurs substances de même nature ou attribut.

$$\forall x \forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y)))$$

1	$S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y$	
2	$S_1(x)$	$\land$E, 1
3	$S_1(y)$	$\land$E, 1
4	$x \neq y$	$\land$E, 1
5	$\exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y))$	
6	$A_2(z,x) \land A_2(z,y)$	
7	$A_2(z,x)$	$\land$E, 6
8	$A_2(z,y)$	$\land$E, 6
9	$\forall a \forall b (A_2(a,b) \land S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
10	$A_2(z,x) \land S_1(x) \rightarrow z = x$	$\forall$E, 9
11	$A_2(z,x) \land S_1(x)$	$\land$I, 7, 2
12	$z = x$	$\Rightarrow$E, 11, 10
13	$A_2(z,y) \land S_1(y) \rightarrow z = y$	$\forall$E, 9
14	$A_2(z,y) \land S_1(y)$	$\land$I, 8, 3
15	$z = y$	$\Rightarrow$E, 14, 13
16	$z = x \land z = y$	$\land$I, 12, 15
17	$x = z$	12
18	$x = y$	17,15
19	$x \neq y$	R, 4
20	$x = y \land x \neq y$	$\land$I, 18, 19
21	$\bot$	$\bot$E, 20
22	$\bot$	$\exists$E, 5, 6–21
23	$\neg \exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y))$	$\neg$I, 5–22
24	$S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y))$	$\Rightarrow$I, 1–23
25	$\forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y)))$	$\forall$I, 24
26	$\forall x \forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y)))$	$\forall$I, 25

3.6 Proposition 6 (P6)

Une substance ne peut pas être produite par une autre substance.

$$\forall x \forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg (K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)))$$

1	$S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y$	
2	$S_1(x)$	$\land$E, 1
3	$S_1(y)$	$\land$E, 1
4	$x \neq y$	$\land$E, 1
5	$\forall a \forall b (S_1(a) \land S_1(b) \land a \neq b \rightarrow \neg \exists z (C_3(z,a,b)))$	P2
6	$S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z,x,y))$	$\forall$E, 5
7	$\neg \exists z (C_3(z,x,y))$	$\Rightarrow$E, 1, 6
8	$\forall a \forall b (\neg \exists z (C_3(z,a,b)) \rightarrow \neg K_2(a,b) \land \neg K_2(b,a))$	P3
9	$\neg \exists z (C_3(z,x,y)) \rightarrow \neg K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)$	$\forall$E, 8
10	$\neg K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 7, 9
11	$\neg K_2(x,y)$	$\land$E, 10
12	$K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)$	
13	$K_2(x,y)$	$\land$E, 12
14	$\neg K_2(x,y)$	R, 11
15	$K_2(x,y) \land \neg K_2(x,y)$	$\land$I, 13, 14
16	$\bot$	$\bot$E, 15
17	$\neg (K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x))$	$\neg$I, 12–16
18	$S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg (K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x))$	$\Rightarrow$I, 1–17
19	$\forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg (K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)))$	$\forall$I, 18
20	$\forall x \forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg (K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)))$	$\forall$I, 19

3.6.1 Corollaire de la Proposition 6 (P6c)

Il suit de là qu'une substance ne peut pas être produite par autre chose.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))))$$

1	$S_1(x)$	
2	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
3	$I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 1, 2
4	$C_2(x,x)$	$\wedge$E, 3
5	$(\neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))) \leftrightarrow C_2(x,x)$	A2
6	$C_2(x,x) \rightarrow \neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	$\wedge$E, 5
7	$\neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	$\Rightarrow$E, 4, 6
8	$\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	
9	$y \neq x \wedge K_2(y,x)$	
10	$y \neq x$	$\wedge$E, 9
11	$K_2(y,x)$	$\wedge$E, 9
12	$\forall a\forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
13	$K_2(y,x) \leftrightarrow C_2(x,y)$	$\forall$E, 12
14	$C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 11, 13
15	$y \neq x \wedge C_2(x,y)$	$\wedge$I, 10, 14
16	$\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	$\exists$I, 15
17	$\neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	R, 7
18	$\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z)) \wedge \neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	$\wedge$I, 16, 17
19	$\bot$	$\bot$E, 18
20	$\bot$	$\exists$E, 8, 9–19
21	$\neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	$\neg$I, 8–20
22	$S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$	$\Rightarrow$I, 1–21
23	$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))))$	$\forall$I, 22

3.7 Proposition 7 (P7)

Il appartient à la nature d'une substance d'exister.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow L(\exists y(y = x)))$$

1	$S_1(x)$	
2	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
3	$I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 1, 2
4	$C_2(x,x)$	$\wedge$E, 3
5	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
6	$K_2(x,x) \leftrightarrow C_2(x,x)$	$\forall$E, 5
7	$K_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 4, 6
8	$\forall a(S_1(a) \rightarrow \neg(\exists b(b \neq a \wedge K_2(b,a))))$	P6c
9	$S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$	$\forall$E, 8
10	$\neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$	$\Rightarrow$E, 1, 9
11	$K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	$\wedge$I, 7, 10
12	$K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)) \leftrightarrow L(\exists y(y = x))$	D1
13	$L(\exists y(y = x))$	$\Rightarrow$E, 11, 12
14	$S_1(x) \rightarrow L(\exists y(y = x))$	$\Rightarrow$I, 1–13
15	$\forall x(S_1(x) \rightarrow L(\exists y(y = x)))$	$\forall$I, 14

3.8 Proposition 8 (P8)

Toute substance est nécessairement infinie.

$$\forall x(S_1(x) \to \neg F_1(x))$$

1	$S_1(x)$	
2	$\quad F_1(x)$	
3	$\quad F_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge L_2(y,x) \wedge \forall z(A_2(z,x) \leftrightarrow A_2(z,y)))$	D2
4	$\quad \exists y(y \neq x \wedge L_2(y,x) \wedge \forall z(A_2(z,x) \leftrightarrow A_2(z,y)))$	$\Rightarrow$E, 2, 3
5	$\quad\quad y \neq x \wedge L_2(y,x) \wedge \forall z(A_2(z,x) \leftrightarrow A_2(z,y))$	
6	$\quad\quad y \neq x$	$\wedge$E, 5
7	$\quad\quad L_2(y,x)$	$\wedge$E, 5
8	$\quad\quad \forall z(A_2(z,x) \leftrightarrow A_2(z,y))$	$\wedge$E, 5
9	$\quad\quad \forall a \forall b(S_1(a) \wedge L_2(b,a) \to S_1(b))$	A11
10	$\quad\quad S_1(x) \wedge L_2(y,x) \to S_1(y)$	$\forall$E, 9
11	$\quad\quad S_1(x) \wedge L_2(y,x)$	$\wedge$I, 1, 7
12	$\quad\quad S_1(y)$	$\Rightarrow$E, 11, 10
13	$\quad\quad \forall a(\exists b(A_2(b,a)))$	A9
14	$\quad\quad \exists b(A_2(b,x))$	$\forall$E, 13
15	$\quad\quad\quad A_2(z,x)$	
16	$\quad\quad\quad A_2(z,x) \leftrightarrow A_2(z,y)$	$\forall$E, 8
17	$\quad\quad\quad A_2(z,y)$	$\Rightarrow$E, 15, 16
18	$\quad\quad\quad A_2(z,x) \wedge A_2(z,y)$	$\wedge$I, 15, 17
19	$\quad\quad\quad \exists z(A_2(z,x) \wedge A_2(z,y))$	$\exists$I, 18
20	$\quad\quad\quad \forall a \forall b(S_1(a) \wedge S_1(b) \wedge a \neq b \to \neg\exists z(A_2(z,a) \wedge A_2(z,b)))$	P5
21	$\quad\quad\quad S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \to \neg\exists z(A_2(z,x) \wedge A_2(z,y))$	$\forall$E, 20
22	$\quad\quad\quad S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y$	$\wedge$I, 1, 12, 6
23	$\quad\quad\quad \neg\exists z(A_2(z,x) \wedge A_2(z,y))$	$\Rightarrow$E, 22, 21
24	$\quad\quad\quad \exists z(A_2(z,x) \wedge A_2(z,y)) \wedge \neg\exists z(A_2(z,x) \wedge A_2(z,y))$	$\wedge$I, 19, 23
25	$\quad\quad\quad \bot$	$\bot$E, 24
26	$\quad\quad \bot$	$\exists$E, 14, 15–25
27	$\quad \bot$	$\exists$E, 4, 5–26
28	$\neg F_1(x)$	$\neg$I, 2–27
29	$S_1(x) \to \neg F_1(x)$	$\Rightarrow$I, 1–28
30	$\forall x(S_1(x) \to \neg F_1(x))$	$\forall$I, 29

3.9 Proposition 9 (P9)

À proportion de la réalité ou de l'être que possède chaque chose, un plus grand nombre d'attributs lui appartiennent.

$$\forall x \forall y((S_1(x) \wedge S_1(y)) \rightarrow (R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y)))$$

1	$S_1(x) \wedge S_1(y)$	
2	$\forall a \forall b((S_1(a) \wedge S_1(b)) \rightarrow (R_2(a,b) \leftrightarrow V_2(a,b)))$	A18
3	$(S_1(x) \wedge S_1(y)) \rightarrow (R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y))$	∀E, 2
4	$R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y)$	⇒E, 1, 3
5	$(S_1(x) \wedge S_1(y)) \rightarrow (R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y))$	⇒I, 1–4
6	$\forall y((S_1(x) \wedge S_1(y)) \rightarrow (R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y)))$	∀I, 5
7	$\forall x \forall y((S_1(x) \wedge S_1(y)) \rightarrow (R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y)))$	∀I, 6

3.10 Proposition 10 (P10)

Chacun des attributs d'une même substance doit être conçu par soi.

$$\forall x(A_1(x) \to C_2(x,x))$$

1	$A_1(x)$	
2	$A_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \land I_2(x,y) \land C_2(x,y) \land I_2(y,x) \land C_2(y,x))$	D4a
3	$\exists y(S_1(y) \land I_2(x,y) \land C_2(x,y) \land I_2(y,x) \land C_2(y,x))$	⇒E, 1, 2
4	$S_1(y) \land I_2(x,y) \land C_2(x,y) \land I_2(y,x) \land C_2(y,x)$	
5	$S_1(y)$	∧E, 4
6	$C_2(y,x)$	∧E, 4
7	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y,y) \land C_2(y,y))$	D3
8	$I_2(y,y) \land C_2(y,y)$	⇒E, 5, 7
9	$C_2(y,y)$	∧E, 8
10	$(\neg\exists z(z \neq y \land C_2(y,z))) \leftrightarrow C_2(y,y)$	A2
11	$C_2(y,y) \to \neg\exists z(z \neq y \land C_2(y,z))$	∧E, 10
12	$\neg\exists z(z \neq y \land C_2(y,z))$	⇒E, 9, 11
13	$x \neq y$	
14	$x \neq y \land C_2(y,x)$	∧I, 13, 6
15	$\exists z(z \neq y \land C_2(y,z))$	∃I, 14
16	$\neg\exists z(z \neq y \land C_2(y,z))$	R, 12
17	$\exists z(z \neq y \land C_2(y,z)) \land \neg\exists z(z \neq y \land C_2(y,z))$	∧I, 15, 16
18	$\bot$	⊥E, 17
19	$\neg(x \neq y)$	¬I, 13–18
20	$x = y$	¬E, 19
21	$C_2(y,y)$	R, 9
22	$C_2(x,x)$	20,21
23	$C_2(x,x)$	∃E, 3, 4–22
24	$A_1(x) \to C_2(x,x)$	⇒I, 1–23
25	$\forall x(A_1(x) \to C_2(x,x))$	∀I, 24

3.11 Proposition 11 (P11)

Dieu, c'est-à-dire une substance constituée par une infinité d'attributs dont chacun exprime une essence éternelle et infinie, existe nécessairement.

$$L(\exists x(G_1(x)))$$

1	$M(\exists x(G_1(x)))$	A13
2	$\exists x(G_1(x))$	
3	$G_1(g)$	
4	$G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y,x)))$	D6
5	$S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y,g))$	$\Rightarrow$E, 3, 4
6	$S_1(g)$	$\wedge$E, 5
7	$\forall x(S_1(x) \rightarrow L(\exists y(y = x)))$	P7
8	$S_1(g) \rightarrow L(\exists y(y = g))$	$\forall$E, 7
9	$L(\exists y(y = g))$	$\Rightarrow$E, 6, 8
10	$\exists y(y = g)$	
11	$y = g$	
12	$G_1(g)$	R, 3
13	$G_1(y)$	11,12
14	$\exists x(G_1(x))$	$\exists$I, 13
15	$\exists x(G_1(x))$	$\exists$E, 10, 11–14
16	$(\exists y(y = g)) \rightarrow (\exists x(G_1(x)))$	$\Rightarrow$I, 10–15
17	$L((\exists y(y = g)) \rightarrow (\exists x(G_1(x))))$	R5, 16
18	$L(\exists y(y = g)) \rightarrow L(\exists x(G_1(x)))$	R3, 17
19	$L(\exists x(G_1(x)))$	$\Rightarrow$E, 9, 18
20	$L(\exists x(G_1(x)))$	$\exists$E, 2, 3–19
21	$(\exists x(G_1(x))) \rightarrow L(\exists x(G_1(x)))$	$\Rightarrow$I, 2–20
22	$L((\exists x(G_1(x))) \rightarrow L(\exists x(G_1(x))))$	R5, 21
23	$M(\exists x(G_1(x))) \wedge L((\exists x(G_1(x))) \rightarrow L(\exists x(G_1(x))))$	$\wedge$I, 1, 22
24	$L(\exists x(G_1(x)))$	S5, 23

3.12 Proposition 12 (P12)

De nul attribut d'une substance il ne peut être formé un concept vrai d'où il suivrait que cette substance pût être divisée.

$$\forall x(S_1(x) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z)))$$

1	$S_1(x)$	
2	$\exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	
3	$D_3(x,y,z)$	
4	$\forall a\forall b\forall c(D_3(a,b,c) \to M(\neg\exists w(w=a)))$	A10
5	$D_3(x,y,z) \to M(\neg\exists w(w=x))$	∀E, 4
6	$M(\neg\exists w(w=x))$	⇒E, 3, 5
7	$\forall a(S_1(a) \to L(\exists w(w=a)))$	P7
8	$S_1(x) \to L(\exists w(w=x))$	∀E, 7
9	$L(\exists w(w=x))$	⇒E, 1, 8
10	$\forall a(M(\neg\exists w(w=a)) \leftrightarrow \neg L(\exists w(w=a)))$	A7
11	$M(\neg\exists w(w=x)) \leftrightarrow \neg L(\exists w(w=x))$	∀E, 10
12	$M(\neg\exists w(w=x)) \to \neg L(\exists w(w=x))$	∧E, 11
13	$\neg L(\exists w(w=x))$	⇒E, 6, 12
14	$L(\exists w(w=x)) \wedge \neg L(\exists w(w=x))$	∧I, 9, 13
15	$\bot$	⊥E, 14
16	$\bot$	∃E, 2, 3–15
17	$\neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	¬I, 2–16
18	$S_1(x) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	⇒I, 1–17
19	$\forall x(S_1(x) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z)))$	∀I, 18

3.13 Proposition 13 (P13)

Une substance absolument infinie est indivisible.

$$\forall x(S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \to A_2(w,x))) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z)))$$

1	$S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \to A_2(w,x)))$	
2	$S_1(x)$	∧E, 1
3	$\forall a(S_1(a) \to \neg\exists y\exists z(D_3(a,y,z)))$	P12
4	$S_1(x) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	∀E, 3
5	$\neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	⇒E, 2, 4
6	$S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \to A_2(w,x))) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	⇒I, 1–5
7	$\forall x(S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \to A_2(w,x))) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z)))$	∀I, 6

3.14 Proposition 14 (P14)

Nulle substance en dehors de Dieu ne peut être donnée ni conçue.

$$\exists x(G_1(x) \land \forall y(S_1(y) \to y = x))$$

1	$L(\exists x(G_1(x)))$	P11
2	$L(p) \to p$	R2
3	$\exists x(G_1(x))$	⇒E, 1, 2
4	$\quad G_1(g)$	
5	$\quad G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,x)))$	D6
6	$\quad S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	⇒E, 4, 5
7	$\quad S_1(g)$	∧E, 6
8	$\quad \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	∧E, 6
9	$\quad\quad S_1(s)$	
10	$\quad\quad \forall x(\exists y(A_2(y,x)))$	A9
11	$\quad\quad \exists y(A_2(y,s))$	∀E, 10
12	$\quad\quad\quad A_2(a,s)$	
13	$\quad\quad\quad A_2(a,s) \leftrightarrow (A_1(a) \land C_2(s,a))$	D4b
14	$\quad\quad\quad A_1(a) \land C_2(s,a)$	⇒E, 12, 13
15	$\quad\quad\quad A_1(a)$	∧E, 14
16	$\quad\quad\quad A_1(a) \to A_2(a,g)$	∀E, 8
17	$\quad\quad\quad A_2(a,g)$	⇒E, 15, 16
18	$\quad\quad\quad A_2(a,g) \land A_2(a,s)$	∧I, 17, 12
19	$\quad\quad\quad \exists z(A_2(z,g) \land A_2(z,s))$	∃I, 18
20	$\quad\quad\quad\quad g \neq s$	
21	$\quad\quad\quad\quad S_1(g) \land S_1(s) \land g \neq s$	∧I, 7, 9, 20
22	$\quad\quad\quad\quad \forall x \forall y(S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \to \neg\exists z(A_2(z,x) \land A_2(z,y)))$	P5
23	$\quad\quad\quad\quad S_1(g) \land S_1(s) \land g \neq s \to \neg\exists z(A_2(z,g) \land A_2(z,s))$	∀E, 22
24	$\quad\quad\quad\quad \neg\exists z(A_2(z,g) \land A_2(z,s))$	⇒E, 21, 23
25	$\quad\quad\quad\quad \exists z(A_2(z,g) \land A_2(z,s))$	R, 19
26	$\quad\quad\quad\quad \neg\exists z(A_2(z,g) \land A_2(z,s)) \land \exists z(A_2(z,g) \land A_2(z,s))$	∧I, 24, 25
27	$\quad\quad\quad\quad \bot$	⊥E, 26
28	$\quad\quad\quad \neg(g \neq s)$	¬I, 20–27
29	$\quad\quad\quad g = s$	¬E, 28
30	$\quad\quad g = s$	∃E, 11, 12–29
31	$\quad S_1(s) \to g = s$	⇒I, 9–30
32	$\quad \forall y(S_1(y) \to y = g)$	∀I, 31
33	$\quad G_1(g) \land \forall y(S_1(y) \to y = g)$	∧I, 4, 32
34	$\quad \exists x(G_1(x) \land \forall y(S_1(y) \to y = x))$	∃I, 33
35	$\exists x(G_1(x) \land \forall y(S_1(y) \to y = x))$	∃E, 3, 4–34

3.14.1 Proposition 14 alternative (P14-A)

Corollaire ou version alternative de P14 : Dieu est unique.

$$\exists x \forall y (G_1(y) \leftrightarrow y = x)$$

1	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	P14
2	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	
3	$G_1(g)$	$\wedge$E, 2
4	$\forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	$\wedge$E, 2
5	$G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall z(A_1(z) \rightarrow A_2(z, x)))$	D6
6	$G_1(y)$	
7	$S_1(y) \wedge \forall z(A_1(z) \rightarrow A_2(z, y))$	$\Rightarrow$E, 6, 5
8	$S_1(y)$	$\wedge$E, 7
9	$S_1(y) \rightarrow y = g$	$\forall$E, 4
10	$y = g$	$\Rightarrow$E, 8, 9
11	$G_1(y) \rightarrow y = g$	$\Rightarrow$I, 6–10
12	$y = g$	
13	$G_1(g)$	R, 3
14	$G_1(y)$	12,13
15	$y = g \rightarrow G_1(y)$	$\Rightarrow$I, 12–14
16	$G_1(y) \leftrightarrow y = g$	$\Rightarrow$I, 11, 15
17	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = g)$	$\forall$I, 16
18	$\exists x \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = x)$	$\exists$I, 17
19	$\exists x \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = x)$	$\exists$E, 1, 2–18

3.15 Proposition 15 (P15)

Tout ce qui est, est en Dieu et rien ne peut sans Dieu être ni être conçu.

$$\forall x \exists g(G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g))$$

1	$\exists g(G_1(g) \land \forall y(S_1(y) \to y = g))$	P14
2	$G_1(g) \land \forall y(S_1(y) \to y = g)$	
3	$G_1(g)$	∧E, 2
4	$\forall y(S_1(y) \to y = g)$	∧E, 2
5	$\forall x(S_1(x) \lor M_1(x))$	DP5
6	$S_1(x) \lor M_1(x)$	∀E, 5
7	$S_1(x)$	
8	$S_1(x) \to x = g$	∀E, 4
9	$x = g$	⇒E, 7, 8
10	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \land C_2(x,x))$	D3
11	$I_2(x,x) \land C_2(x,x)$	⇒E, 7, 10
12	$I_2(x,x)$	∧E, 11
13	$C_2(x,x)$	∧E, 11
14	$I_2(x,g)$	9,12
15	$C_2(x,g)$	9,13
16	$I_2(x,g) \land C_2(x,g)$	∧I, 14, 15
17	$G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g)$	∧I, 3, 16
18	$\exists g(G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g))$	∃I, 17
19	$M_1(x)$	
20	$M_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \land M_2(x,y))$	D5b
21	$\exists y(S_1(y) \land M_2(x,y))$	⇒E, 19, 20
22	$S_1(y) \land M_2(x,y)$	
23	$S_1(y)$	∧E, 22
24	$M_2(x,y)$	∧E, 22
25	$S_1(y) \to y = g$	∀E, 4
26	$y = g$	⇒E, 23, 25
27	$M_2(x,g)$	24,26
28	$M_2(x,y) \leftrightarrow (x \neq y \land I_2(x,y) \land C_2(x,y))$	D5a
29	$x \neq g \land I_2(x,g) \land C_2(x,g)$	⇒E, 27, 28
30	$I_2(x,g) \land C_2(x,g)$	∧E, 29
31	$G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g)$	∧I, 3, 30
32	$\exists g(G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g))$	∃I, 31
33	$\exists g(G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g))$	∃E, 21, 22–32
34	$\exists g(G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g))$	∨E, 6, 7–18, 19–33
35	$\exists g(G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g))$	∃E, 1, 2–34
36	$\forall x \exists g(G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g))$	∀I, 35

3.16 Proposition 16 (P16)

De la nécessité de la nature divine doivent suivre en une infinité de modes une infinité de choses, c'est-à-dire tout ce qui peut tomber sous un entendement infini. (Dieu est cause de toute chose).

$$\forall x \exists g (G_1(g) \wedge K_2(g, x))$$

1	$\forall x \exists g (G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g))$	P15
2	$\exists g (G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g))$	$\forall$E, 1
3	$G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g)$	
4	$G_1(g)$	$\wedge$E, 3
5	$C_2(x, g)$	$\wedge$E, 3
6	$\forall a \forall b (K_2(a, b) \leftrightarrow C_2(b, a))$	A4
7	$K_2(g, x) \leftrightarrow C_2(x, g)$	$\forall$E, 6
8	$K_2(g, x)$	$\Rightarrow$E, 5, 7
9	$G_1(g) \wedge K_2(g, x)$	$\wedge$I, 4, 8
10	$\exists g (G_1(g) \wedge K_2(g, x))$	$\exists$I, 9
11	$\exists g (G_1(g) \wedge K_2(g, x))$	$\exists$E, 2, 3–10
12	$\forall x \exists g (G_1(g) \wedge K_2(g, x))$	$\forall$I, 11

3.17 Proposition 17 (P17)

Dieu agit par les seules lois de sa nature et sans subir aucune contrainte.

$$\exists g(G_1(g) \land \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))) \land \forall x(K_2(g,x)))$$

1	$\exists x(G_1(x) \land \forall y(S_1(y) \to y = x))$	P14
2	$\quad G_1(g) \land \forall y(S_1(y) \to y = g)$	
3	$\quad G_1(g)$	∧E, 2
4	$\quad \forall y(S_1(y) \to y = g)$	∧E, 2
5	$\quad G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g)))$	D6
6	$\quad S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	⇒E, 3, 5
7	$\quad S_1(g)$	∧E, 6
8	$\quad\quad \exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))$	
9	$\quad\quad\quad \neg I_2(e,g) \land K_2(e,g)$	
10	$\quad\quad\quad \neg I_2(e,g)$	∧E, 9
11	$\quad\quad\quad K_2(e,g)$	∧E, 9
12	$\quad\quad\quad \forall x(S_1(x) \to \neg(\exists y(y \neq x \land K_2(y,x))))$	P6c
13	$\quad\quad\quad S_1(g) \to \neg(\exists y(y \neq g \land K_2(y,g)))$	∀E, 12
14	$\quad\quad\quad \neg(\exists y(y \neq g \land K_2(y,g)))$	⇒E, 7, 13
15	$\quad\quad\quad \neg(e \neq g \land K_2(e,g))$	∀E, 14
16	$\quad\quad\quad e = g \lor \neg K_2(e,g)$	De Morgan, 15
17	$\quad\quad\quad\quad e = g$	
18	$\quad\quad\quad\quad S_1(g) \leftrightarrow (I_2(g,g) \land C_2(g,g))$	D3
19	$\quad\quad\quad\quad I_2(g,g) \land C_2(g,g)$	⇒E, 7, 18
20	$\quad\quad\quad\quad I_2(g,g)$	∧E, 19
21	$\quad\quad\quad\quad I_2(e,g)$	17,20
22	$\quad\quad\quad\quad \neg I_2(e,g)$	R, 10
23	$\quad\quad\quad\quad I_2(e,g) \land \neg I_2(e,g)$	∧I, 21, 22
24	$\quad\quad\quad\quad \bot$	⊥E, 23
25	$\quad\quad\quad\quad \neg K_2(e,g)$	
26	$\quad\quad\quad\quad K_2(e,g)$	R, 11
27	$\quad\quad\quad\quad K_2(e,g) \land \neg K_2(e,g)$	∧I, 26, 25
28	$\quad\quad\quad\quad \bot$	⊥E, 27
29	$\quad\quad\quad \bot$	∨E, 16, 17–24, 25–28
30	$\quad\quad \bot$	∃E, 8, 9–29
31	$\quad \neg\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))$	¬I, 8–30
32	$\quad \forall x\exists h(G_1(h) \land K_2(h,x))$	P16
33	$\quad \exists h(G_1(h) \land K_2(h,x))$	∀E, 32
34	$\quad\quad G_1(h) \land K_2(h,x)$	
35	$\quad\quad G_1(h)$	∧E, 34
36	$\quad\quad \exists z\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
37	$\quad\quad\quad \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
38	$\quad\quad\quad G_1(g) \leftrightarrow g = z$	∀E, 37
39	$\quad\quad\quad G_1(h) \leftrightarrow h = z$	∀E, 37
40	$\quad\quad\quad g = z$	⇒E, 3, 38
41	$\quad\quad\quad h = z$	⇒E, 35, 39
42	$\quad\quad\quad h = g$	40,41
43	$\quad\quad\quad K_2(h,x)$	∧E, 34
44	$\quad\quad\quad K_2(g,x)$	42,43
45	$\quad\quad K_2(g,x)$	∃E, 36, 37–44
46	$\quad K_2(g,x)$	∃E, 33, 34–45
47	$\quad \forall x(K_2(g,x))$	∀I, 46
48	$\quad G_1(g) \land \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))) \land \forall x(K_2(g,x))$	∧I, 3, 31, 47
49	$\quad \exists g(G_1(g) \land \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))) \land \forall x(K_2(g,x)))$	∃I, 48
50	$\exists g(G_1(g) \land \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))) \land \forall x(K_2(g,x)))$	∃E, 1, 2–49

3.17.1 Corollaire 2 de la Proposition 17 (P17c2)

Il suit : 2° que Dieu seul est cause libre.

$$\exists g(G_1(g) \wedge B_1(g) \wedge \forall x(B_1(x) \to x = g))$$

1	$\exists g(G_1(g) \wedge \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \wedge K_2(x,g))) \wedge \forall x(K_2(g,x)))$	P17
2	$\quad G_1(g) \wedge \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \wedge K_2(x,g))) \wedge \forall x(K_2(g,x))$	
3	$\quad G_1(g)$	∧E, 2
4	$\quad \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \wedge K_2(x,g)))$	∧E, 2
5	$\quad G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g)))$	D6
6	$\quad S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	⇒E, 3, 5
7	$\quad S_1(g)$	∧E, 6
8	$\quad \forall x(S_1(x) \leftrightarrow K_2(x,x))$	DPIII
9	$\quad S_1(g) \leftrightarrow K_2(g,g)$	∀E, 8
10	$\quad K_2(g,g)$	⇒E, 7, 9
11	$\quad \forall x(S_1(x) \to \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))))$	P6c
12	$\quad S_1(g) \to \neg(\exists y(y \neq g \wedge K_2(y,g)))$	∀E, 11
13	$\quad \neg(\exists y(y \neq g \wedge K_2(y,g)))$	⇒E, 7, 12
14	$\quad K_2(g,g) \wedge \neg\exists y(y \neq g \wedge K_2(y,g))$	∧I, 10, 13
15	$\quad B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$	D7a
16	$\quad K_2(g,g) \wedge \neg\exists y(y \neq g \wedge K_2(y,g)) \leftrightarrow B_1(g)$	∀E, 15
17	$\quad B_1(g)$	⇒E, 14, 16
18	$\quad\quad B_1(x)$	
19	$\quad\quad B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$	D7a
20	$\quad\quad K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	⇒E, 18, 19
21	$\quad\quad K_2(x,x)$	∧E, 20
22	$\quad\quad \forall z(S_1(z) \leftrightarrow K_2(z,z))$	DPIII
23	$\quad\quad K_2(x,x) \leftrightarrow S_1(x)$	∀E, 22
24	$\quad\quad S_1(x)$	⇒E, 21, 23
25	$\quad\quad \exists z(G_1(z) \wedge \forall y(S_1(y) \to y = z))$	P14
26	$\quad\quad\quad G_1(h) \wedge \forall y(S_1(y) \to y = h)$	
27	$\quad\quad\quad \forall y(S_1(y) \to y = h)$	∧E, 26
28	$\quad\quad\quad S_1(x) \to x = h$	∀E, 27
29	$\quad\quad\quad x = h$	⇒E, 24, 28
30	$\quad\quad\quad G_1(h)$	∧E, 26
31	$\quad\quad\quad \exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
32	$\quad\quad\quad\quad \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
33	$\quad\quad\quad\quad G_1(g) \leftrightarrow g = z$	∀E, 32
34	$\quad\quad\quad\quad G_1(h) \leftrightarrow h = z$	∀E, 32
35	$\quad\quad\quad\quad g = z$	⇒E, 3, 33
36	$\quad\quad\quad\quad h = z$	⇒E, 30, 34
37	$\quad\quad\quad\quad h = g$	35,36
38	$\quad\quad\quad\quad x = h$	R, 29
39	$\quad\quad\quad\quad x = g$	38,37
40	$\quad\quad\quad x = g$	∃E, 31, 32–39
41	$\quad\quad x = g$	∃E, 25, 26–40
42	$\quad B_1(x) \to x = g$	⇒I, 18–41
43	$\quad \forall x(B_1(x) \to x = g)$	∀I, 42
44	$\quad G_1(g) \wedge B_1(g) \wedge \forall x(B_1(x) \to x = g)$	∧I, 3, 17, 43
45	$\quad \exists g(G_1(g) \wedge B_1(g) \wedge \forall x(B_1(x) \to x = g))$	∃I, 44
46	$\exists g(G_1(g) \wedge B_1(g) \wedge \forall x(B_1(x) \to x = g))$	∃E, 1, 2–45

3.18 Proposition 18 (P18)

Dieu est cause immanente mais non transitive de toutes choses.

$$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x)))$$

1	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	P14
2	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	
3	$G_1(g)$	$\wedge$E, 2
4	$\forall x \exists h(G_1(h) \wedge I_2(x,h) \wedge C_2(x,h))$	P15
5	$\forall x \exists h(G_1(h) \wedge K_2(h,x))$	P16
6	$I_2(x,g)$	
7	$\forall a \forall b(I_2(a,b) \rightarrow C_2(a,b))$	A8
8	$I_2(x,g) \rightarrow C_2(x,g)$	$\forall$E, 7
9	$C_2(x,g)$	$\Rightarrow$E, 6, 8
10	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
11	$K_2(g,x) \leftrightarrow C_2(x,g)$	$\forall$E, 10
12	$K_2(g,x)$	$\Rightarrow$E, 9, 11
13	$I_2(x,g) \rightarrow K_2(g,x)$	$\Rightarrow$I, 6–12
14	$K_2(g,x)$	
15	$\exists h(G_1(h) \wedge I_2(x,h) \wedge C_2(x,h))$	$\forall$E, 4
16	$G_1(h) \wedge I_2(x,h) \wedge C_2(x,h)$	
17	$G_1(h)$	$\wedge$E, 16
18	$I_2(x,h)$	$\wedge$E, 16
19	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
20	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
21	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	$\forall$E, 20
22	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	$\forall$E, 20
23	$g = z$	$\Rightarrow$E, 3, 21
24	$h = z$	$\Rightarrow$E, 17, 22
25	$h = g$	23,24
26	$I_2(x,h)$	R, 18
27	$I_2(x,g)$	25,26
28	$I_2(x,g)$	$\exists$E, 19, 20–27
29	$I_2(x,g)$	$\exists$E, 15, 16–28
30	$K_2(g,x) \rightarrow I_2(x,g)$	$\Rightarrow$I, 14–29
31	$I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x)$	$\Rightarrow$I, 13, 30
32	$\forall x(I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x))$	$\forall$I, 31
33	$G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x))$	$\wedge$I, 3, 32
34	$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x)))$	$\exists$I, 33
35	$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x)))$	$\exists$E, 1, 2–34

3.19 Proposition 19 (P19)

Dieu est éternel, autrement dit tous les attributs de Dieu sont éternels.

$$\exists g(G_1(g) \land E_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \to E_1(x)))$$

1	$\exists x(G_1(x) \land \forall y(S_1(y) \to y = x))$	P14
2	$\quad G_1(g) \land \forall y(S_1(y) \to y = g)$	
3	$\quad G_1(g)$	∧E, 2
4	$\quad G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g)))$	D6
5	$\quad S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	⇒E, 3, 4
6	$\quad S_1(g)$	∧E, 5
7	$\quad \forall x(S_1(x) \to L(\exists y(y = x)))$	P7
8	$\quad S_1(g) \to L(\exists y(y = g))$	∀E, 7
9	$\quad L(\exists y(y = g))$	⇒E, 6, 8
10	$\quad E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$	D8
11	$\quad L(\exists y(y = g)) \leftrightarrow E_1(g)$	∀E, 10
12	$\quad E_1(g)$	⇒E, 9, 11
13	$\quad\quad A_2(x,g)$	
14	$\quad\quad A_2(x,y) \leftrightarrow (A_1(x) \land C_2(y,x))$	D4b
15	$\quad\quad A_1(x) \land C_2(g,x)$	⇒E, 13, 14
16	$\quad\quad A_1(x)$	∧E, 15
17	$\quad\quad \forall z(A_1(z) \to C_2(z,z))$	P10
18	$\quad\quad A_1(x) \to C_2(x,x)$	∀E, 17
19	$\quad\quad C_2(x,x)$	⇒E, 16, 18
20	$\quad\quad \forall a \forall b(A_2(a,b) \land S_1(b) \to a = b)$	DP7
21	$\quad\quad A_2(x,g) \land S_1(g) \to x = g$	∀E, 20
22	$\quad\quad A_2(x,g) \land S_1(g)$	∧I, 13, 6
23	$\quad\quad x = g$	⇒E, 22, 21
24	$\quad\quad E_1(g)$	R, 12
25	$\quad\quad E_1(x)$	23,24
26	$\quad A_2(x,g) \to E_1(x)$	⇒I, 13–25
27	$\quad \forall x(A_2(x,g) \to E_1(x))$	∀I, 26
28	$\quad G_1(g) \land E_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \to E_1(x))$	∧I, 3, 12, 27
29	$\quad \exists g(G_1(g) \land E_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \to E_1(x)))$	∃I, 28
30	$\exists g(G_1(g) \land E_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \to E_1(x)))$	∃E, 1, 2–29

3.20 Proposition 20 (P20)

L'existence de Dieu et son essence sont une seule et même chose.

$$\exists g(G_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \to x = g))$$

1	$\exists x(G_1(x) \land \forall y(S_1(y) \to y = x))$	P14
2	$G_1(g) \land \forall y(S_1(y) \to y = g)$	
3	$G_1(g)$	∧E, 2
4	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g)))$	D6
5	$S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	⇒E, 3, 4
6	$S_1(g)$	∧E, 5
7	$A_2(x,g)$	
8	$\forall a \forall b(A_2(a,b) \land S_1(b) \to a = b)$	DP7
9	$A_2(x,g) \land S_1(g) \to x = g$	∀E, 8
10	$A_2(x,g) \land S_1(g)$	∧I, 7, 6
11	$x = g$	⇒E, 10, 9
12	$A_2(x,g) \to x = g$	⇒I, 7–11
13	$\forall x(A_2(x,g) \to x = g)$	∀I, 12
14	$G_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \to x = g)$	∧I, 3, 13
15	$\exists g(G_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \to x = g))$	∃I, 14
16	$\exists g(G_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \to x = g))$	∃E, 1, 2–15

3.21 Proposition 21 (P21)

Tout ce qui suit de la nature d'un attribut de Dieu prise absolument, a toujours dû exister et est infini, autrement dit est infini et éternel par la vertu de cet attribut.

$$\forall x((\exists g \exists y(G_1(g) \land A_2(y,g) \land x \neq g \land K_2(y,x) \land \neg(\exists z(z \neq y \land K_2(z,x))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \land \neg F_1(x)))$$

1	$\exists g \exists y(G_1(g) \land A_2(y,g) \land x \neq g \land K_2(y,x) \land \neg(\exists z(z \neq y \land K_2(z,x))))$	
2	$G_1(g) \land A_2(y,g) \land x \neq g \land K_2(y,x) \land \neg(\exists z(z \neq y \land K_2(z,x)))$	
3	$G_1(g)$	∧E, 2
4	$A_2(y,g)$	∧E, 2
5	$K_2(y,x)$	∧E, 2
6	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \land \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w,g)))$	D6
7	$S_1(g) \land \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w,g))$	⇒E, 3, 6
8	$S_1(g)$	∧E, 7
9	$\forall a \forall b(A_2(a,b) \land S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
10	$A_2(y,g) \land S_1(g) \rightarrow y = g$	∀E, 9
11	$A_2(y,g) \land S_1(g)$	∧I, 4, 8
12	$y = g$	⇒E, 11, 10
13	$K_2(g,x)$	12,5
14	$\exists g(G_1(g) \land E_1(g) \land \forall z(A_2(z,g) \rightarrow E_1(z)))$	P19
15	$G_1(h) \land E_1(h) \land \forall z(A_2(z,h) \rightarrow E_1(z))$	
16	$G_1(h)$	∧E, 15
17	$E_1(h)$	∧E, 15
18	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
19	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
20	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	∀E, 19
21	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	∀E, 19
22	$g = z$	⇒E, 3, 20
23	$h = z$	⇒E, 16, 21
24	$g = h$	22,23
25	$E_1(h)$	R, 17
26	$E_1(g)$	24,25
27	$E_1(g)$	∃E, 18, 19–26
28	$E_1(g)$	∃E, 14, 15–27
29	$E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$	D8
30	$E_1(g) \leftrightarrow L(\exists v(v = g))$	∀E, 29
31	$L(\exists v(v = g))$	⇒E, 28, 30
32	$\forall p(L(p) \rightarrow N(p))$	R1
33	$L(\exists v(v = g)) \rightarrow N(\exists v(v = g))$	∀E, 32
34	$N(\exists v(v = g))$	⇒E, 31, 33
35	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \rightarrow N((\exists v(v = a)) \leftrightarrow \exists v(v = b)))$	A3
36	$K_2(g,x) \rightarrow N((\exists v(v = g)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	∀E, 35
37	$N((\exists v(v = g)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	⇒E, 13, 36
38	$N((\exists v(v = g)) \rightarrow (\exists v(v = x)))$	R7, 37
39	$\forall p \forall q(N(p \rightarrow q) \rightarrow (N(p) \rightarrow N(q)))$	R6
40	$N((\exists v(v = g)) \rightarrow (\exists v(v = x))) \rightarrow (N(\exists v(v = g)) \rightarrow N(\exists v(v = x)))$	∀E, 39
41	$N(\exists v(v = g)) \rightarrow N(\exists v(v = x))$	⇒E, 38, 40
42	$N(\exists v(v = x))$	⇒E, 34, 41
43	$\forall a(N(\exists y(y = a)) \leftrightarrow \neg F_1(a))$	A14
44	$N(\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg F_1(x)$	∀E, 43
45	$N(\exists y(y = x)) \rightarrow \neg F_1(x)$	∧E, 44
46	$\neg F_1(x)$	⇒E, 42, 45
47	$N(\exists v(v = x)) \land \neg F_1(x)$	∧I, 42, 46
48	$N(\exists v(v = x)) \land \neg F_1(x)$	∃E, 1, 2–47
49	$(\exists g \exists y(G_1(g) \land A_2(y,g) \land x \neq g \land K_2(y,x) \land \neg(\exists z(z \neq y \land K_2(z,x))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \land \neg F_1(x))$	⇒I, 1–48
50	$\forall x((\exists g \exists y(G_1(g) \land A_2(y,g) \land x \neq g \land K_2(y,x) \land \neg(\exists z(z \neq y \land K_2(z,x))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \land \neg F_1(x)))$	∀I, 49

3.22 Proposition 22 (P22)

Tout ce qui suit d'un attribut de Dieu, en tant qu'il est affecté d'une modification qui par la vertu de cet attribut existe nécessairement et est infinie, doit aussi exister nécessairement et être infini.

$$\forall x((\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \wedge A_2(y,g) \wedge M_1(y') \wedge \neg F_1(y') \wedge N(\exists v(v = y')) \wedge K_2(y,x) \wedge K_2(y',x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge z \neq y' \wedge K_2(z,x))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)))$$

1	$\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \wedge A_2(y,g) \wedge M_1(y') \wedge \neg F_1(y') \wedge N(\exists v(v = y')) \wedge K_2(y,x) \wedge K_2(y',x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge z \neq y' \wedge K_2(z,x))))$	
2	$G_1(g) \wedge A_2(y,g) \wedge M_1(y') \wedge \neg F_1(y') \wedge N(\exists v(v = y')) \wedge K_2(y,x) \wedge K_2(y',x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge z \neq y' \wedge K_2(z,x)))$	
3	$G_1(g)$	∧E, 2
4	$A_2(y,g)$	∧E, 2
5	$M_1(y')$	∧E, 2
6	$\neg F_1(y')$	∧E, 2
7	$N(\exists v(v = y'))$	∧E, 2
8	$K_2(y,x)$	∧E, 2
9	$K_2(y',x)$	∧E, 2
10	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w,g)))$	D6
11	$S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w,g))$	⇒E, 3,
12	$S_1(g)$	∧E, 11
13	$\forall a \forall b(A_2(a,b) \wedge S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
14	$A_2(y,g) \wedge S_1(g) \rightarrow y = g$	∀E, 13
15	$A_2(y,g) \wedge S_1(g)$	∧I, 4, 12
16	$y = g$	⇒E, 15,
17	$K_2(g,x)$	16,8
18	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \rightarrow N((\exists v(v = a)) \leftrightarrow \exists v(v = b)))$	A3
19	$K_2(y',x) \rightarrow N((\exists v(v = y')) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	∀E, 18
20	$N((\exists v(v = y')) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	⇒E, 9,
21	$N((\exists v(v = y')) \rightarrow (\exists v(v = x)))$	R7, 20
22	$\forall p \forall q(N(p \rightarrow q) \rightarrow (N(p) \rightarrow N(q)))$	R6
23	$N((\exists v(v = y')) \rightarrow (\exists v(v = x))) \rightarrow (N(\exists v(v = y')) \rightarrow N(\exists v(v = x)))$	∀E, 22
24	$N(\exists v(v = y')) \rightarrow N(\exists v(v = x))$	⇒E, 21,
25	$N(\exists v(v = x))$	⇒E, 7, 2
26	$\forall a(N(\exists y(y = a)) \leftrightarrow \neg F_1(a))$	A14
27	$N(\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg F_1(x)$	∀E, 26
28	$N(\exists y(y = x)) \rightarrow \neg F_1(x)$	∧E, 27
29	$\neg F_1(x)$	⇒E, 25,
30	$N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)$	∧I, 25, 2
31	$N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)$	∃E, 1, 2-
32	$(\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \wedge A_2(y,g) \wedge M_1(y') \wedge \neg F_1(y') \wedge N(\exists v(v = y')) \wedge K_2(y,x) \wedge K_2(y',x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge z \neq y' \wedge K_2(z,x))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x))$	⇒I, 1–3
33	$\forall x((\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \wedge A_2(y,g) \wedge M_1(y') \wedge \neg F_1(y') \wedge N(\exists v(v = y')) \wedge K_2(y,x) \wedge K_2(y',x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge z \neq y' \wedge K_2(z,x))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)))$	∀I, 32

3.23 Proposition 23 (P23)

Tout mode qui existe nécessairement et est infini, a dû suivre nécessairement ou bien de la nature d'un attribut de Dieu prise absolument, ou bien d'un attribut affecté d'une modification qui elle-même existe nécessairement et est infinie.

$$\forall x(N(\exists v(v = x)) \to \exists g \exists y(G_1(g) \land A_2(y, g) \land N((\exists v(v = y)) \to (\exists v(v = x)))))$$

1	$N(\exists v(v = x))$	
2	$\exists g(G_1(g) \land \forall y(S_1(y) \to y = g))$	P14
3	$G_1(g) \land \forall y(S_1(y) \to y = g)$	
4	$G_1(g)$	∧E, 3
5	$\forall x(\exists y(A_2(y, x)))$	A9
6	$\exists y(A_2(y, g))$	∀E, 5
7	$A_2(y, g)$	
8	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \land \forall w(A_1(w) \to A_2(w, g)))$	D6
9	$S_1(g) \land \forall w(A_1(w) \to A_2(w, g))$	⇒E, 4, 8
10	$S_1(g)$	∧E, 9
11	$\forall a \forall b(A_2(a, b) \land S_1(b) \to a = b)$	DP7
12	$A_2(y, g) \land S_1(g) \to y = g$	∀E, 11
13	$A_2(y, g) \land S_1(g)$	∧I, 7, 10
14	$y = g$	⇒E, 13, 12
15	$\forall z \exists h(G_1(h) \land I_2(z, h) \land C_2(z, h))$	P15
16	$\exists h(G_1(h) \land I_2(x, h) \land C_2(x, h))$	∀E, 15
17	$G_1(h) \land I_2(x, h) \land C_2(x, h)$	
18	$G_1(h)$	∧E, 17
19	$I_2(x, h)$	∧E, 17
20	$C_2(x, h)$	∧E, 17
21	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
22	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
23	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	∀E, 22
24	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	∀E, 22
25	$g = z$	⇒E, 4, 23
26	$h = z$	⇒E, 18, 24
27	$h = g$	25,26
28	$C_2(x, h)$	R, 20
29	$C_2(x, g)$	27,28
30	$C_2(x, g)$	∃E, 21, 22–29
31	$\forall a \forall b(K_2(a, b) \leftrightarrow C_2(b, a))$	A4
32	$K_2(g, x) \leftrightarrow C_2(x, g)$	∀E, 31
33	$K_2(g, x)$	⇒E, 30, 32
34	$K_2(y, x)$	14,33
35	$\forall a \forall b(K_2(a, b) \to N((\exists v(v = a)) \leftrightarrow \exists v(v = b)))$	A3
36	$K_2(y, x) \to N((\exists v(v = y)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	∀E, 35
37	$N((\exists v(v = y)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	⇒E, 34, 36
38	$N((\exists v(v = y)) \to (\exists v(v = x)))$	R7, 37
39	$G_1(g) \land A_2(y, g) \land N((\exists v(v = y)) \to (\exists v(v = x)))$	∧I, 4, 7, 38
40	$\exists g \exists y(G_1(g) \land A_2(y, g) \land N((\exists v(v = y)) \to (\exists v(v = x))))$	∃I, 39
41	$\exists g \exists y(G_1(g) \land A_2(y, g) \land N((\exists v(v = y)) \to (\exists v(v = x))))$	∃E, 6, 7–40
42	$\exists g \exists y(G_1(g) \land A_2(y, g) \land N((\exists v(v = y)) \to (\exists v(v = x))))$	∃E, 2, 3–41
43	$N(\exists v(v = x)) \to \exists g \exists y(G_1(g) \land A_2(y, g) \land N((\exists v(v = y)) \to (\exists v(v = x))))$	⇒I, 1–42
44	$\forall x(N(\exists v(v = x)) \to \exists g \exists y(G_1(g) \land A_2(y, g) \land N((\exists v(v = y)) \to (\exists v(v = x)))))$	∀I, 43

3.24 Proposition 24 (P24)

L'essence des choses produites par Dieu n'enveloppe pas l'existence.

$$\forall x((\exists g(G_1(g) \land x \neq g \land K_2(g,x))) \rightarrow \neg L(\exists v(v = x)))$$

1	$\exists g(G_1(g) \land x \neq g \land K_2(g,x))$	
2	$G_1(g) \land x \neq g \land K_2(g,x)$	
3	$x \neq g$	$\land$E, 2
4	$K_2(g,x)$	$\land$E, 2
5	$L(\exists v(v = x))$	
6	$K_2(x,x) \land \neg\exists y(y \neq x \land K_2(y,x)) \leftrightarrow L(\exists y(y = x))$	D1
7	$L(\exists y(y = x)) \rightarrow K_2(x,x) \land \neg\exists y(y \neq x \land K_2(y,x))$	$\land$E, 6
8	$K_2(x,x) \land \neg\exists y(y \neq x \land K_2(y,x))$	$\Rightarrow$E, 5, 7
9	$\neg\exists y(y \neq x \land K_2(y,x))$	$\land$E, 8
10	$g \neq x$	3
11	$g \neq x \land K_2(g,x)$	$\land$I, 10, 4
12	$\exists y(y \neq x \land K_2(y,x))$	$\exists$I, 11
13	$\neg\exists y(y \neq x \land K_2(y,x)) \land \exists y(y \neq x \land K_2(y,x))$	$\land$I, 9, 12
14	$\bot$	$\bot$E, 13
15	$\neg L(\exists v(v = x))$	$\neg$I, 5–14
16	$\neg L(\exists v(v = x))$	$\exists$E, 1, 2–15
17	$(\exists g(G_1(g) \land x \neq g \land K_2(g,x))) \rightarrow \neg L(\exists v(v = x)))$	$\Rightarrow$I, 1–16
18	$\forall x((\exists g(G_1(g) \land x \neq g \land K_2(g,x))) \rightarrow \neg L(\exists v(v = x))))$	$\forall$I, 17

3.25 Proposition 25 (P25)

Dieu n'est pas seulement cause efficiente de l'existence, mais aussi de l'essence des choses.

$$\forall x \exists g(G_1(g) \land K_2(g,x))$$

1	$\forall x \exists g(G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g))$	P15
2	$\exists g(G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g))$	$\forall$E, 1
3	$G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g)$	
4	$G_1(g)$	$\land$E, 3
5	$C_2(x,g)$	$\land$E, 3
6	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
7	$K_2(g,x) \leftrightarrow C_2(x,g)$	$\forall$E, 6
8	$K_2(g,x)$	$\Rightarrow$E, 5, 7
9	$G_1(g) \land K_2(g,x)$	$\land$I, 4, 8
10	$\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x))$	$\exists$I, 9
11	$\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x))$	$\exists$E, 2, 3–10
12	$\forall x \exists g(G_1(g) \land K_2(g,x))$	$\forall$I, 11

3.26 Proposition 26 (P26)

Une chose qui est déterminée à produire quelque effet a été nécessairement déterminée par Dieu ; et celle qui n'a pas été déterminée par Dieu ne peut se déterminer elle-même à produire un effet.

$$\forall x \forall y((\exists z \exists z'(M_2(y,z) \land M_2(z',z) \land K_2(x,y))) \rightarrow \exists g(G_1(g) \land K_2(g,y)))$$

1	$\exists z \exists z'(M_2(y,z) \land M_2(z',z) \land K_2(x,y))$	
2	$\forall x \exists g(G_1(g) \land K_2(g,x))$	P16
3	$\exists g(G_1(g) \land K_2(g,y))$	∀E, 2
4	$(\exists z \exists z'(M_2(y,z) \land M_2(z',z) \land K_2(x,y))) \rightarrow \exists g(G_1(g) \land K_2(g,y)))$	⇒I, 1–3
5	$\forall y((\exists z \exists z'(M_2(y,z) \land M_2(z',z) \land K_2(x,y))) \rightarrow \exists g(G_1(g) \land K_2(g,y))))$	∀I, 4
6	$\forall x \forall y((\exists z \exists z'(M_2(y,z) \land M_2(z',z) \land K_2(x,y))) \rightarrow \exists g(G_1(g) \land K_2(g,y))))$	∀I, 5

3.27 Proposition 27 (P27)

Une chose qui est déterminée par Dieu à produire quelque effet ne peut se rendre elle-même indéterminée.

$$\forall x((\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x) \land \neg(\exists z(z \neq g \land K_2(z,x))))) \to N(\exists v(v = x)))$$

1	$\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x) \land \neg(\exists z(z \neq g \land K_2(z,x))))$	
2	$G_1(g) \land K_2(g,x) \land \neg(\exists z(z \neq g \land K_2(z,x)))$	
3	$G_1(g)$	∧E, 2
4	$K_2(g,x)$	∧E, 2
5	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
6	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = h)$	
7	$G_1(g) \leftrightarrow g = h$	∀E, 6
8	$g = h$	⇒E, 3, 7
9	$\exists k(G_1(k) \land E_1(k) \land \forall z(A_2(z,k) \to E_1(z)))$	P19
10	$G_1(k) \land E_1(k) \land \forall z(A_2(z,k) \to E_1(z))$	
11	$G_1(k)$	∧E, 10
12	$E_1(k)$	∧E, 10
13	$G_1(k) \leftrightarrow k = h$	∀E, 6
14	$k = h$	⇒E, 11, 13
15	$g = h$	R, 8
16	$g = k$	15,14
17	$E_1(k)$	R, 12
18	$E_1(g)$	16,17
19	$E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$	D8
20	$E_1(g) \leftrightarrow L(\exists v(v = g))$	∀E, 19
21	$L(\exists v(v = g))$	⇒E, 18, 20
22	$\forall p(L(p) \to N(p))$	R1
23	$L(\exists v(v = g)) \to N(\exists v(v = g))$	∀E, 22
24	$N(\exists v(v = g))$	⇒E, 21, 23
25	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \to N((\exists v(v = a)) \leftrightarrow \exists v(v = b)))$	A3
26	$K_2(g,x) \to N((\exists v(v = g)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	∀E, 25
27	$N((\exists v(v = g)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	⇒E, 4, 26
28	$N((\exists v(v = g)) \to (\exists v(v = x)))$	R7, 27
29	$\forall p \forall q(N(p \to q) \to (N(p) \to N(q)))$	R6
30	$N((\exists v(v = g)) \to (\exists v(v = x))) \to (N(\exists v(v = g)) \to N(\exists v(v = x)))$	∀E, 29
31	$N(\exists v(v = g)) \to N(\exists v(v = x))$	⇒E, 28, 30
32	$N(\exists v(v = x))$	⇒E, 24, 31
33	$N(\exists v(v = x))$	∃E, 9, 10–32
34	$N(\exists v(v = x))$	∃E, 5, 6–33
35	$N(\exists v(v = x))$	∃E, 1, 2–34
36	$(\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x) \land \neg(\exists z(z \neq g \land K_2(z,x))))) \to N(\exists v(v = x)))$	⇒I, 1–35
37	$\forall x((\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x) \land \neg(\exists z(z \neq g \land K_2(z,x))))) \to N(\exists v(v = x))))$	∀I, 36

3.28 Proposition 28 (P28)

Une chose singulière quelconque, autrement dit toute chose qui est finie et a une existence déterminée, ne peut exister et être déterminée à produire quelque effet, si elle n'est déterminée à exister et à produire cet effet par une autre cause qui est elle-même finie et a une existence déterminée ; et à son tour cette cause ne peut non plus exister et être déterminée à produire quelque effet, si elle n'est déterminée à exister et à produire cet effet par une autre qui est aussi finie et a une existence déterminée, et ainsi à l'infini.

$$\forall x((F_1(x) \land \neg N(\exists v(v = x))) \to (\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x) \land (\forall y(I_2(x,y) \to K_2(y,x))) \land (\exists z(z \neq x \land K_2(z,x) \land \neg N(\exists v(v = z)) \land F_1(z))))))$$

1	$F_1(x) \land \neg N(\exists v(v = x))$	
2	$F_1(x)$	∧E, 1
3	$\neg N(\exists v(v = x))$	∧E, 1
4	$\forall z \exists g(G_1(g) \land K_2(g,z))$	P16
5	$\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x))$	∀E, 4
6	$G_1(g) \land K_2(g,x)$	
7	$G_1(g)$	∧E, 6
8	$K_2(g,x)$	∧E, 6
9	$I_2(x,y)$	
10	$\forall a \forall b(I_2(a,b) \to C_2(a,b))$	A8
11	$I_2(x,y) \to C_2(x,y)$	∀E, 10
12	$C_2(x,y)$	⇒E, 9, 11
13	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
14	$K_2(y,x) \leftrightarrow C_2(x,y)$	∀E, 13
15	$K_2(y,x)$	⇒E, 12, 14
16	$I_2(x,y) \to K_2(y,x)$	⇒I, 9–15
17	$\forall y(I_2(x,y) \to K_2(y,x))$	∀I, 16
18	$\forall x(S_1(x) \lor M_1(x))$	DP5
19	$S_1(x) \lor M_1(x)$	∀E, 18
20	$S_1(x)$	
21	$\forall a(S_1(a) \to \neg F_1(a))$	P8
22	$S_1(x) \to \neg F_1(x)$	∀E, 21
23	$\neg F_1(x)$	⇒E, 20, 22
24	$F_1(x)$	R, 2
25	$F_1(x) \land \neg F_1(x)$	∧I, 24, 23
26	$\bot$	⊥E, 25
27	$\neg S_1(x)$	¬I, 20–26
28	$S_1(x) \lor M_1(x)$	R, 19
29	$\neg M_1(x)$	
30	$\neg S_1(x) \land \neg M_1(x)$	∧I, 27, 29
31	$\neg(S_1(x) \lor M_1(x))$	De Morgan, 30
32	$S_1(x) \lor M_1(x) \land \neg(S_1(x) \lor M_1(x))$	∧I, 28, 31
33	$\bot$	⊥E, 32
34	$M_1(x)$	¬I, 29–33
35	$F_1(x) \land \neg N(\exists v(v = x)) \land M_1(x)$	∧I, 2, 3, 34
36	$\exists z(z \neq x \land K_2(z,x) \land \neg N(\exists v(v = z)) \land F_1(z))$	R10, 35
37	$G_1(g) \land K_2(g,x) \land (\forall y(I_2(x,y) \to K_2(y,x))) \land (\exists z(z \neq x \land K_2(z,x) \land \neg N(\exists v(v = z)) \land F_1(z)))$	∧I, 7, 8, 17, 36
38	$\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x) \land (\forall y(I_2(x,y) \to K_2(y,x))) \land (\exists z(z \neq x \land K_2(z,x) \land \neg N(\exists v(v = z)) \land F_1(z))))$	∃I, 37
39	$\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x) \land (\forall y(I_2(x,y) \to K_2(y,x))) \land (\exists z(z \neq x \land K_2(z,x) \land \neg N(\exists v(v = z)) \land F_1(z))))$	∃E, 5, 6–38
40	$(F_1(x) \land \neg N(\exists v(v = x))) \to (\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x) \land (\forall y(I_2(x,y) \to K_2(y,x))) \land (\exists z(z \neq x \land K_2(z,x) \land \neg N(\exists v(v = z)) \land F_1(z)))))$	⇒I, 1–39
41	$\forall x((F_1(x) \land \neg N(\exists v(v = x))) \to (\exists g(G_1(g) \land K_2(g,x) \land (\forall y(I_2(x,y) \to K_2(y,x))) \land (\exists z(z \neq x \land K_2(z,x) \land \neg N(\exists v(v = z)) \land F_1(z))))))$	∀I, 40

3.29 Proposition 29 (P29)

Il n'est rien donné de contingent dans la nature, mais tout y est déterminé par la nécessité de la nature divine à exister et à produire quelque effet d'une certaine manière.

$$\exists g(G_1(g) \wedge L(\exists x(x = g)) \wedge (\forall x(x \neq g \rightarrow N_1(x))))$$

1	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
2	$\quad \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = g)$	
3	$\quad G_1(g) \leftrightarrow g = g$	∀E, 2
4	$\quad g = g$	reflexivité
5	$\quad G_1(g)$	⇒E, 4, 3
6	$\quad L(\exists x(G_1(x)))$	P11
7	$\quad\quad \exists x(G_1(x))$	
8	$\quad\quad\quad G_1(h)$	
9	$\quad\quad\quad G_1(h) \leftrightarrow h = g$	∀E, 2
10	$\quad\quad\quad h = g$	⇒E, 8, 9
11	$\quad\quad\quad \exists x(x = g)$	∃I, 10
12	$\quad\quad \exists x(x = g)$	∃E, 7, 8–11
13	$\quad (\exists x(G_1(x))) \rightarrow (\exists x(x = g))$	⇒I, 7–12
14	$\quad L((\exists x(G_1(x))) \rightarrow (\exists x(x = g)))$	R5, 13
15	$\quad L(\exists x(G_1(x))) \rightarrow L(\exists x(x = g))$	R3, 14
16	$\quad L(\exists x(x = g))$	⇒E, 6, 15
17	$\quad\quad x \neq g$	
18	$\quad\quad \forall z \exists h(G_1(h) \wedge K_2(h, z))$	P16
19	$\quad\quad \exists h(G_1(h) \wedge K_2(h, x))$	∀E, 18
20	$\quad\quad\quad G_1(h) \wedge K_2(h, x)$	
21	$\quad\quad\quad G_1(h)$	∧E, 20
22	$\quad\quad\quad K_2(h, x)$	∧E, 20
23	$\quad\quad\quad G_1(h) \leftrightarrow h = g$	∀E, 2
24	$\quad\quad\quad h = g$	⇒E, 21, 23
25	$\quad\quad\quad K_2(g, x)$	24,22
26	$\quad\quad\quad x \neq g$	R, 17
27	$\quad\quad\quad g \neq x$	symétrie, 26
28	$\quad\quad\quad g \neq x \wedge K_2(g, x)$	∧I, 27, 25
29	$\quad\quad\quad \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))$	∃I, 28
30	$\quad\quad\quad N_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))$	D7b
31	$\quad\quad\quad N_1(x)$	⇒E, 29, 30
32	$\quad\quad N_1(x)$	∃E, 19, 20–31
33	$\quad x \neq g \rightarrow N_1(x)$	⇒I, 17–32
34	$\quad \forall x(x \neq g \rightarrow N_1(x))$	∀I, 33
35	$\quad G_1(g) \wedge L(\exists x(x = g)) \wedge (\forall x(x \neq g \rightarrow N_1(x)))$	∧I, 5, 16, 34
36	$\quad \exists g(G_1(g) \wedge L(\exists x(x = g)) \wedge (\forall x(x \neq g \rightarrow N_1(x))))$	∃I, 35
37	$\exists g(G_1(g) \wedge L(\exists x(x = g)) \wedge (\forall x(x \neq g \rightarrow N_1(x))))$	∃E, 1, 2–36

3.30 Proposition 30 (P30)

Un entendement, actuellement fini ou actuellement infini, doit comprendre les attributs de Dieu et les affections de Dieu et rien autre chose.

$$\forall x \forall y((A_1(x) \land T_1(x) \land O_2(y,x)) \to (A_1(y) \lor M_1(y)))$$

1	$A_1(x) \land T_1(x) \land O_2(y,x)$	
2	$A_1(x)$	∧E, 1
3	$T_1(x)$	∧E, 1
4	$O_2(y,x)$	∧E, 1
5	$\forall a(S_1(a) \lor M_1(a))$	DP5
6	$S_1(y) \lor M_1(y)$	∀E, 5
7	$S_1(y)$	
8	$\forall a(\exists b(A_2(b,a)))$	A9
9	$\exists b(A_2(b,y))$	∀E, 8
10	$A_2(z,y)$	
11	$A_2(a,b) \leftrightarrow (A_1(a) \land C_2(b,a))$	D4b
12	$A_2(z,y) \leftrightarrow (A_1(z) \land C_2(y,z))$	∀E, 11
13	$A_1(z) \land C_2(y,z)$	⇒E, 10, 12
14	$C_2(y,z)$	∧E, 13
15	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y,y) \land C_2(y,y))$	D3
16	$I_2(y,y) \land C_2(y,y)$	⇒E, 7, 15
17	$C_2(y,y)$	∧E, 16
18	$(\neg\exists w(w \neq y \land C_2(y,w))) \leftrightarrow C_2(y,y)$	A2
19	$C_2(y,y) \to \neg\exists w(w \neq y \land C_2(y,w))$	∧E, 18
20	$\neg\exists w(w \neq y \land C_2(y,w))$	⇒E, 17, 19
21	$z \neq y$	
22	$z \neq y \land C_2(y,z)$	∧I, 21, 14
23	$\exists w(w \neq y \land C_2(y,w))$	∃I, 22
24	$\neg\exists w(w \neq y \land C_2(y,w))$	R, 20
25	$\exists w(w \neq y \land C_2(y,w)) \land \neg\exists w(w \neq y \land C_2(y,w))$	∧I, 23, 24
26	$\bot$	⊥E, 25
27	$\neg(z \neq y)$	¬I, 21–26
28	$z = y$	¬E, 27
29	$A_1(z)$	∧E, 13
30	$A_1(y)$	28,29
31	$A_1(y) \lor M_1(y)$	∨I, 30
32	$A_1(y) \lor M_1(y)$	∃E, 9, 10–31
33	$M_1(y)$	
34	$A_1(y) \lor M_1(y)$	∨I, 33
35	$A_1(y) \lor M_1(y)$	∨E, 6, 7–32, 33–34
36	$(A_1(x) \land T_1(x) \land O_2(y,x)) \to (A_1(y) \lor M_1(y))$	⇒I, 1–35
37	$\forall y((A_1(x) \land T_1(x) \land O_2(y,x)) \to (A_1(y) \lor M_1(y)))$	∀I, 36
38	$\forall x \forall y((A_1(x) \land T_1(x) \land O_2(y,x)) \to (A_1(y) \lor M_1(y)))$	∀I, 37

3.31 Proposition 31 (P31)

L'entendement en acte, qu'il soit fini ou infini, comme aussi la volonté, le désir, l'amour, etc., doivent être rapportés à la Nature Naturée et non à la Naturante.

Cela revient à dire que l'entendement, la volonté, le désir et l'amour sont des modes.

3.31.1 Proposition 31a (P31a)

L'entendement est un mode.

$$\forall x(U_1(x) \to M_1(x))$$

1	$U_1(x)$	
2	$\forall a((S_1(a) \wedge \neg M_1(a)) \vee (\neg S_1(a) \wedge M_1(a)))$	DPI
3	$(S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x))$	∀E, 2
4	$S_1(x) \wedge \neg M_1(x)$	
5	$S_1(x)$	∧E, 4
6	$\forall a(S_1(a) \to A_2(a,a))$	DPII
7	$S_1(x) \to A_2(x,x)$	∀E, 6
8	$A_2(x,x)$	⇒E, 5, 7
9	$A_2(a,b) \leftrightarrow (A_1(a) \wedge C_2(b,a))$	D4b
10	$A_2(x,x) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(x,x))$	∀E, 9
11	$A_1(x) \wedge C_2(x,x)$	⇒E, 8, 10
12	$A_1(x)$	∧E, 11
13	$\forall a(U_1(a) \to \neg A_1(a))$	A17a
14	$U_1(x) \to \neg A_1(x)$	∀E, 13
15	$\neg A_1(x)$	⇒E, 1, 14
16	$A_1(x) \wedge \neg A_1(x)$	∧I, 12, 15
17	$\bot$	⊥E, 16
18	$\neg S_1(x) \wedge M_1(x)$	
19	$M_1(x)$	∧E, 18
20	$M_1(x)$	∨E, 3, 4–17, 18–19
21	$U_1(x) \to M_1(x)$	⇒I, 1–20
22	$\forall x(U_1(x) \to M_1(x))$	∀I, 21

3.31.2 Proposition 31b (P31b)

La volonté est un mode.

$$\forall x(W_1(x) \to M_1(x))$$

1	$W_1(x)$	
2	$\forall a((S_1(a) \wedge \neg M_1(a)) \vee (\neg S_1(a) \wedge M_1(a)))$	DPI
3	$(S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x))$	∀E, 2
4	$S_1(x) \wedge \neg M_1(x)$	
5	$S_1(x)$	∧E, 4
6	$\forall a(S_1(a) \to A_2(a, a))$	DPII
7	$S_1(x) \to A_2(x, x)$	∀E, 6
8	$A_2(x, x)$	⇒E, 5, 7
9	$A_2(a, b) \leftrightarrow (A_1(a) \wedge C_2(b, a))$	D4b
10	$A_2(x, x) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(x, x))$	∀E, 9
11	$A_1(x) \wedge C_2(x, x)$	⇒E, 8, 10
12	$A_1(x)$	∧E, 11
13	$\forall a(W_1(a) \to \neg A_1(a))$	A17b
14	$W_1(x) \to \neg A_1(x)$	∀E, 13
15	$\neg A_1(x)$	⇒E, 1, 14
16	$A_1(x) \wedge \neg A_1(x)$	∧I, 12, 15
17	$\bot$	⊥E, 16
18	$\neg S_1(x) \wedge M_1(x)$	
19	$M_1(x)$	∧E, 18
20	$M_1(x)$	∨E, 3, 4–17, 18–19
21	$W_1(x) \to M_1(x)$	⇒I, 1–20
22	$\forall x(W_1(x) \to M_1(x))$	∀I, 21

3.31.3 Proposition 31c (P31c)

Le désir est un mode.

$$\forall x(D_1(x) \to M_1(x))$$

1	$D_1(x)$	
2	$\forall a((S_1(a) \land \neg M_1(a)) \lor (\neg S_1(a) \land M_1(a)))$	DPI
3	$(S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x))$	∀E, 2
4	$S_1(x) \land \neg M_1(x)$	
5	$S_1(x)$	∧E, 4
6	$\forall a(S_1(a) \to A_2(a, a))$	DPII
7	$S_1(x) \to A_2(x, x)$	∀E, 6
8	$A_2(x, x)$	⇒E, 5, 7
9	$A_2(a, b) \leftrightarrow (A_1(a) \land C_2(b, a))$	D4b
10	$A_2(x, x) \leftrightarrow (A_1(x) \land C_2(x, x))$	∀E, 9
11	$A_1(x) \land C_2(x, x)$	⇒E, 8, 10
12	$A_1(x)$	∧E, 11
13	$\forall a(D_1(a) \to \neg A_1(a))$	A17c
14	$D_1(x) \to \neg A_1(x)$	∀E, 13
15	$\neg A_1(x)$	⇒E, 1, 14
16	$A_1(x) \land \neg A_1(x)$	∧I, 12, 15
17	$\bot$	⊥E, 16
18	$\neg S_1(x) \land M_1(x)$	
19	$M_1(x)$	∧E, 18
20	$M_1(x)$	∨E, 3, 4–17, 18–19
21	$D_1(x) \to M_1(x)$	⇒I, 1–20
22	$\forall x(D_1(x) \to M_1(x))$	∀I, 21

3.31.4 Proposition 31d (P31d)

L'amour est un mode.

$$\forall x(J_1(x) \to M_1(x))$$

1	$J_1(x)$	
2	$\forall a((S_1(a) \land \neg M_1(a)) \lor (\neg S_1(a) \land M_1(a)))$	DPI
3	$(S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x))$	∀E, 2
4	$S_1(x) \land \neg M_1(x)$	
5	$S_1(x)$	∧E, 4
6	$\forall a(S_1(a) \to A_2(a, a))$	DPII
7	$S_1(x) \to A_2(x, x)$	∀E, 6
8	$A_2(x, x)$	⇒E, 5, 7
9	$A_2(a, b) \leftrightarrow (A_1(a) \land C_2(b, a))$	D4b
10	$A_2(x, x) \leftrightarrow (A_1(x) \land C_2(x, x))$	∀E, 9
11	$A_1(x) \land C_2(x, x)$	⇒E, 8, 10
12	$A_1(x)$	∧E, 11
13	$\forall a(J_1(a) \to \neg A_1(a))$	A17d
14	$J_1(x) \to \neg A_1(x)$	∀E, 13
15	$\neg A_1(x)$	⇒E, 1, 14
16	$A_1(x) \land \neg A_1(x)$	∧I, 12, 15
17	$\bot$	⊥E, 16
18	$\neg S_1(x) \land M_1(x)$	
19	$M_1(x)$	∧E, 18
20	$M_1(x)$	∨E, 3, 4–17, 18–19
21	$J_1(x) \to M_1(x)$	⇒I, 1–20
22	$\forall x(J_1(x) \to M_1(x))$	∀I, 21

3.32 Proposition 32 (P32)

La volonté ne peut être appelée cause libre, mais seulement cause nécessaire.

$$\forall x(W_1(x) \to (\neg B_1(x) \wedge N_1(x)))$$

1	$W_1(x)$	
2	$W_1(x) \to M_1(x)$	P31b
3	$M_1(x)$	⇒E, 1, 2
4	$B_1(x)$	
5	$B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$	D7a
6	$K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	⇒E, 4, 5
7	$\neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	∧E, 6
8	$\forall z\exists g(G_1(g) \wedge K_2(g,z))$	P16
9	$\exists g(G_1(g) \wedge K_2(g,x))$	∀E, 8
10	$G_1(g) \wedge K_2(g,x)$	
11	$G_1(g)$	∧E, 10
12	$K_2(g,x)$	∧E, 10
13	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g)))$	D6
14	$S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	⇒E, 11, 13
15	$S_1(g)$	∧E, 14
16	$g = x$	
17	$S_1(x)$	16,15
18	$\forall z((S_1(z) \wedge \neg M_1(z)) \vee (\neg S_1(z) \wedge M_1(z)))$	DPI
19	$(S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x))$	∀E, 18
20	$M_1(x)$	R, 3
21	$S_1(x) \wedge \neg M_1(x)$	
22	$\neg M_1(x)$	∧E, 21
23	$M_1(x) \wedge \neg M_1(x)$	∧I, 20, 22
24	$\bot$	⊥E, 23
25	$\neg S_1(x) \wedge M_1(x)$	
26	$\neg S_1(x)$	∧E, 25
27	$S_1(x)$	R, 17
28	$S_1(x) \wedge \neg S_1(x)$	∧I, 27, 26
29	$\bot$	⊥E, 28
30	$\bot$	∨E, 19, 21–24, 25–29
31	$g \neq x$	¬I, 16–30
32	$g \neq x \wedge K_2(g,x)$	∧I, 31, 12
33	$\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	∃I, 32
34	$\neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	R, 7
35	$\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	∧I, 33, 34
36	$\bot$	⊥E, 35
37	$\bot$	∃E, 9, 10–36
38	$\neg B_1(x)$	¬I, 4–37
39	$N_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	D7b
40	$\forall z\exists g(G_1(g) \wedge K_2(g,z))$	P16
41	$\exists g(G_1(g) \wedge K_2(g,x))$	∀E, 40
42	$G_1(g) \wedge K_2(g,x)$	
43	$G_1(g)$	∧E, 42
44	$K_2(g,x)$	∧E, 42
45	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g)))$	D6
46	$S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	⇒E, 43, 45
47	$S_1(g)$	∧E, 46
48	$g = x$	
49	$S_1(x)$	48,47
50	$\forall z((S_1(z) \wedge \neg M_1(z)) \vee (\neg S_1(z) \wedge M_1(z)))$	DPI
51	$(S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x))$	∀E, 50
52	$M_1(x)$	R, 3
53	$S_1(x) \wedge \neg M_1(x)$	
54	$\neg M_1(x)$	∧E, 53
55	$M_1(x) \wedge \neg M_1(x)$	∧I, 52, 54
56	$\bot$	⊥E, 55
57	$\neg S_1(x) \wedge M_1(x)$	
58	$\neg S_1(x)$	∧E, 57
59	$S_1(x)$	R, 49
60	$S_1(x) \wedge \neg S_1(x)$	∧I, 59, 58
61	$\bot$	⊥E, 60
62	$\bot$	∨E, 51, 53–56, 57–61
63	$g \neq x$	¬I, 48–62
64	$g \neq x \wedge K_2(g,x)$	∧I, 63, 44
65	$\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	∃I, 64
66	$N_1(x)$	⇒E, 65, 39
67	$N_1(x)$	∃E, 41, 42–66
68	$\neg B_1(x) \wedge N_1(x)$	∧I, 38, 67
69	$W_1(x) \to (\neg B_1(x) \wedge N_1(x))$	⇒I, 1–68
70	$\forall x(W_1(x) \to (\neg B_1(x) \wedge N_1(x)))$	∀I, 69

3.33 Proposition 33 (P33)

Les choses n'ont pu être produites par Dieu d'aucune manière autre et dans aucun ordre autre, que de la manière et dans l'ordre où elles ont été produites.

$$\forall g \forall y (G_1(g) \wedge K_2(g, y) \rightarrow \neg M(\exists z (z \neq y \wedge K_2(g, z))))$$

Note : Jarrett indique explicitement que cette proposition n'est pas dérivable du système formel tel qu'il a été présenté. Pour démontrer cette proposition, il serait nécessaire d'ajouter des axiomes supplémentaires qui formaliseraient le nécessitarisme divin de Spinoza.

Nous pourrions, par exemple, ajouter l'axiome suivant :
R11 : $\forall g \forall y \forall z (G_1(g) \wedge K_2(g, y) \wedge K_2(g, z) \rightarrow (y = z \vee \neg(\exists v(v = y)) \vee \neg(\exists v(v = z))))$
qui stipule que si Dieu cause deux choses, elles sont soit identiques, soit l'une d'entre elles n'existe pas.

3.34 Proposition 34 (P34)

La puissance de Dieu est son essence même.

$$\exists g(G_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \leftrightarrow P_2(x,g)))$$

1	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
2	$\quad \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = g)$	
3	$\quad G_1(g) \leftrightarrow g = g$	∀E, 2
4	$\quad g = g$	Réflexivité
5	$\quad G_1(g)$	⇒E, 4, 3
6	$\quad G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y,g)))$	D6
7	$\quad S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y,g))$	⇒E, 5, 6
8	$\quad S_1(g)$	∧E, 7
9	$\quad\quad A_2(x,g)$	
10	$\quad\quad A_2(x,g) \leftrightarrow (A_1(x) \land C_2(g,x))$	D4b
11	$\quad\quad A_1(x) \land C_2(g,x)$	⇒E, 9, 10
12	$\quad\quad A_1(x)$	∧E, 11
13	$\quad\quad C_2(g,x)$	∧E, 11
14	$\quad\quad \forall a \forall b(A_2(a,b) \land S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
15	$\quad\quad A_2(x,g) \land S_1(g) \rightarrow x = g$	∀E, 14
16	$\quad\quad A_2(x,g) \land S_1(g)$	∧I, 9, 8
17	$\quad\quad x = g$	⇒E, 16, 15
18	$\quad\quad S_1(g) \leftrightarrow (I_2(g,g) \land C_2(g,g))$	D3
19	$\quad\quad I_2(g,g) \land C_2(g,g)$	⇒E, 8, 18
20	$\quad\quad I_2(g,g)$	∧E, 19
21	$\quad\quad C_2(g,g)$	∧E, 19
22	$\quad\quad I_2(x,g)$	17,20
23	$\quad\quad C_2(x,g)$	17,21
24	$\quad\quad I_2(g,x)$	17,20
25	$\quad\quad C_2(g,x)$	R, 13
26	$\quad\quad (((I_2(x,g) \land C_2(x,g)) \land I_2(g,x)) \land C_2(g,x)) \leftrightarrow P_2(x,g)$	A19
27	$\quad\quad ((I_2(x,g) \land C_2(x,g)) \land I_2(g,x)) \land C_2(g,x)$	∧I, 22, 23, 24, 25
28	$\quad\quad P_2(x,g)$	⇒E, 27, 26
29	$\quad A_2(x,g) \rightarrow P_2(x,g)$	⇒I, 9–28
30	$\quad\quad P_2(x,g)$	
31	$\quad\quad (((I_2(x,g) \land C_2(x,g)) \land I_2(g,x)) \land C_2(g,x)) \leftrightarrow P_2(x,g)$	A19
32	$\quad\quad ((I_2(x,g) \land C_2(x,g)) \land I_2(g,x)) \land C_2(g,x)$	⇒E, 30, 31
33	$\quad\quad I_2(x,g) \land C_2(x,g) \land I_2(g,x) \land C_2(g,x)$	Logique, 32
34	$\quad\quad I_2(x,g)$	∧E, 33
35	$\quad\quad C_2(x,g)$	∧E, 33
36	$\quad\quad I_2(g,x)$	∧E, 33
37	$\quad\quad C_2(g,x)$	∧E, 33
38	$\quad\quad A_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \land I_2(x,y) \land C_2(x,y) \land I_2(y,x) \land C_2(y,x))$	D4a
39	$\quad\quad \exists y(S_1(y) \land I_2(x,y) \land C_2(x,y) \land I_2(y,x) \land C_2(y,x)) \rightarrow A_1(x)$	∧E, 38
40	$\quad\quad S_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g) \land I_2(g,x) \land C_2(g,x)$	∧I, 8, 34, 35, 36, 37
41	$\quad\quad \exists y(S_1(y) \land I_2(x,y) \land C_2(x,y) \land I_2(y,x) \land C_2(y,x))$	∃I, 40
42	$\quad\quad A_1(x)$	⇒E, 41, 39
43	$\quad\quad A_1(x) \land C_2(g,x)$	∧I, 42, 37
44	$\quad\quad A_2(x,g) \leftrightarrow (A_1(x) \land C_2(g,x))$	D4b
45	$\quad\quad A_2(x,g)$	⇒E, 43, 44
46	$\quad P_2(x,g) \rightarrow A_2(x,g)$	⇒I, 30–45
47	$\quad A_2(x,g) \leftrightarrow P_2(x,g)$	⇒I, 29, 46
48	$\quad \forall x(A_2(x,g) \leftrightarrow P_2(x,g))$	∀I, 47
49	$\quad G_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \leftrightarrow P_2(x,g))$	∧I, 5, 48
50	$\quad \exists g(G_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \leftrightarrow P_2(x,g)))$	∃I, 49
51	$\exists g(G_1(g) \land \forall x(A_2(x,g) \leftrightarrow P_2(x,g)))$	∃E, 1, 2–50

3.35 Proposition 35 (P35)

Tout ce que nous concevons qui est au pouvoir de Dieu, est nécessairement.

$$\exists g(G_1(g) \wedge L(\exists x(x = g)) \wedge (\forall x(x \neq g \rightarrow N_1(x))))$$

1	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
2	$\quad \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = g)$	
3	$\quad G_1(g) \leftrightarrow g = g$	∀E, 2
4	$\quad g = g$	Réflexivité
5	$\quad G_1(g)$	⇒E, 4, 3
6	$\quad L(\exists x(G_1(x)))$	P11
7	$\quad\quad \exists x(G_1(x))$	
8	$\quad\quad\quad G_1(h)$	
9	$\quad\quad\quad G_1(h) \leftrightarrow h = g$	∀E, 2
10	$\quad\quad\quad h = g$	⇒E, 8, 9
11	$\quad\quad\quad \exists x(x = g)$	∃I, 10
12	$\quad\quad \exists x(x = g)$	∃E, 7, 8–11
13	$\quad (\exists x(G_1(x))) \rightarrow (\exists x(x = g))$	⇒I, 7–12
14	$\quad L((\exists x(G_1(x))) \rightarrow (\exists x(x = g)))$	R5, 13
15	$\quad L(\exists x(G_1(x))) \rightarrow L(\exists x(x = g))$	R3, 14
16	$\quad L(\exists x(x = g))$	⇒E, 6, 15
17	$\quad\quad x \neq g$	
18	$\quad\quad \forall z \exists h(G_1(h) \wedge K_2(h, z))$	P16
19	$\quad\quad \exists h(G_1(h) \wedge K_2(h, x))$	∀E, 18
20	$\quad\quad\quad G_1(h) \wedge K_2(h, x)$	
21	$\quad\quad\quad G_1(h)$	∧E, 20
22	$\quad\quad\quad K_2(h, x)$	∧E, 20
23	$\quad\quad\quad G_1(h) \leftrightarrow h = g$	∀E, 2
24	$\quad\quad\quad h = g$	⇒E, 21, 23
25	$\quad\quad\quad K_2(g, x)$	24,22
26	$\quad\quad\quad x \neq g$	R, 17
27	$\quad\quad\quad g \neq x$	Symétrie, 26
28	$\quad\quad\quad g \neq x \wedge K_2(g, x)$	∧I, 27, 25
29	$\quad\quad\quad \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))$	∃I, 28
30	$\quad\quad\quad N_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))$	D7b
31	$\quad\quad\quad N_1(x)$	⇒E, 29, 30
32	$\quad\quad N_1(x)$	∃E, 19, 20–31
33	$\quad x \neq g \rightarrow N_1(x)$	⇒I, 17–32
34	$\quad \forall x(x \neq g \rightarrow N_1(x))$	∀I, 33
35	$\quad G_1(g) \wedge L(\exists x(x = g)) \wedge (\forall x(x \neq g \rightarrow N_1(x)))$	∧I, 5, 16, 34
36	$\quad \exists g(G_1(g) \wedge L(\exists x(x = g)) \wedge (\forall x(x \neq g \rightarrow N_1(x))))$	∃I, 35
37	$\exists g(G_1(g) \wedge L(\exists x(x = g)) \wedge (\forall x(x \neq g \rightarrow N_1(x))))$	∃E, 1, 2–36

3.36 Proposition 36 (P36)

Rien n'existe de la nature de quoi ne suive quelque effet.

$$\forall x((\exists v(v = x)) \rightarrow \exists y(K_2(x, y)))$$

Note : Jarrett indique explicitement que cette proposition n'est pas dérivable du système formel tel qu'il a été présenté. Pour démontrer cette proposition, il serait nécessaire d'ajouter des axiomes supplémentaires concernant la nature productive de toute chose dans le système spinoziste, notamment concernant la productivité causale des modes.

On pourrait esquisser la forme que prendrait une telle preuve :

1	$\exists v(v = x)$	
2	$\forall z(S_1(z) \vee M_1(z))$	DP5
3	$S_1(x) \vee M_1(x)$	∀E, 2
4	$S_1(x)$	
5	$\forall z(S_1(z) \leftrightarrow K_2(z, z))$	DPIII
6	$S_1(x) \leftrightarrow K_2(x, x)$	∀E, 5
7	$K_2(x, x)$	⇒E, 4, 6
8	$\exists y(K_2(x, y))$	∃I, 7
9	$M_1(x)$	
10	$M_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge M_2(x, y))$	D5b
11	$\exists y(S_1(y) \wedge M_2(x, y))$	⇒E, 9, 10
12	$S_1(s) \wedge M_2(x, s)$	
13	$S_1(s)$	∧E, 12
14	$M_2(x, s)$	∧E, 12
15	$\forall z(S_1(z) \rightarrow K_2(z, z))$	DP4
16	$S_1(s) \rightarrow K_2(s, s)$	∀E, 15
17	$K_2(s, s)$	⇒E, 13, 16
18	$M_2(x, s) \leftrightarrow (x \neq s \wedge I_2(x, s) \wedge C_2(x, s))$	D5a
19	$x \neq s \wedge I_2(x, s) \wedge C_2(x, s)$	⇒E, 14, 18
20	$I_2(x, s)$	∧E, 19
21	$C_2(x, s)$	∧E, 19
22	$\forall z \exists g(G_1(g) \wedge K_2(g, z))$	P16
23	$\exists g(G_1(g) \wedge K_2(g, x))$	∀E, 22
24	Nécessite d'axiomes supplémentaires concernant la productivité causale	
25	$\exists y(K_2(x, y))$	Incomplet
26	$\exists y(K_2(x, y))$	∃E, 11, 12–25
27	$\exists y(K_2(x, y))$	∨E, 3, 4–8, 9–26
28	$(\exists v(v = x)) \rightarrow \exists y(K_2(x, y))$	⇒I, 1–27
29	$\forall x((\exists v(v = x)) \rightarrow \exists y(K_2(x, y)))$	∀I, 28

Références

[1] Spinoza, Baruch. *Éthique*, traduit du latin par Charles Appuhn. Paris : GF-Flammarion, 1965.

[2] Spinoza, Baruch. *The Collected Works of Spinoza*, édité et traduit par Edwin Curley. Princeton : Princeton University Press, 1985.

[3] Jarrett, Charles. "The Logical Structure of Spinoza's 'Ethics', Part I." *Synthese*, vol. 37, no. 1, 1978, pp. 15–65.

[4] Guéroult, Martial. *Spinoza I : Dieu (Éthique, I)*. Paris : Aubier-Montaigne, 1968.

[5] Bennett, Jonathan. *A Study of Spinoza's Ethics*. Indianapolis : Hackett, 1984.

[6] Mélès, Baptiste. "Spinoza en Coq : démonstration complète des premières propositions de l'Éthique." *Mathématiques, Informatique et Philosophie*, 2015.

[7] Mélès, Baptiste. "L'Ethique de Spinoza en Coq." GitHub Repository, 2015-2018. `https://github.com/BapMel/ethicoq`.

[8] Gentzen, Gerhard. "Investigations into Logical Deduction." *In The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, édité par M. E. Szabo. Amsterdam : North-Holland, 1969.

[9] Fitting, Melvin. *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*. Dordrecht : Reidel, 1983.

[10] Lassaigne, R. et de Rougemont, M. (2004). Logique et fondements de l'informatique : logique du premier ordre, théorie des modèles, calculabilité, lambda-calcul et programmation fonctionnelle, complexité, logiques non classiques, déduction naturelle. Hermes Science Publications, Paris.

[11] Cori, René, et Daniel Lascar. *Logique mathématique*. Paris : Dunod, 2003.

[12] Coq Development Team. "The Coq Proof Assistant." `https://coq.inria.fr/`.

[13] Pommeret, Luc. "Projet Spinoza : Formalisation en Coq des propositions du Livre I de l'Éthique." GitHub Repository, 2025. `https://github.com/l-pommeret/Projet-Spinoza`.

[14] Coquand, Thierry, et Gérard Huet. "The Calculus of Constructions." *Information and Computation*,1988.

[15] Vidal-Rosset, Joseph. "L'argument d'Anselme en logique du premier ordre" *Klesis - Revue philosophique*, 2020.